2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中二年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

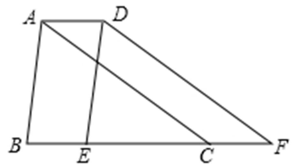
2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

(B)1. 如圖，將△ABC 沿 BC 方向平移 1 個單位長度得到△DEF，若△ABC 的周長等於 8，則四邊形 ABFD 的周長等於____________.

(A)9 (B)10 (C)11 (D)12



<解析>

∵平移 1 個單位➔ $\overline{AD}=\overline{CF}=1$

∴四邊形 ABFD= $\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{DF}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CF}+\overline{AC}+\overline{AD}=8+2=10$

(C)2. 已知 $1^2+1=2^2-2$，$2^2+2=3^2-3$，$3^2+3=4^2-4$，………，$99^2+99=100^2-100$，若 $\dfrac{59^2+59}{31^2-31}$ =k，則 k=? (A)2 (B)$\dfrac{61}{31}$ (C)$\dfrac{118}{31}$ (D)$\dfrac{122}{31}$

<解析>

$$\frac{59^2+59}{31^2-31}=\frac{60^2-60}{30^2+30}=\frac{60\cdot(60-1)}{30\cdot(30+1)}=\frac{118}{31}$$

(B)3. 已知點 $A(a-2, 3b)$在第一象限，點 $B(4-a, b-2)$在第四象限，若 a, b 為整數，則 $2a+b=$?(A)6 (B)7 (C)8 (D)9

<解析>

∵ a, b 為整數

∴ $a-2>0$ 且 $4-a>0$ ➔ $2<a<4$

∴ $3b>0$ 且 $b-2<0$ ➔ $0<b<2$

∴a=3，b=1，則 2a+b=2×3+1=7

(B)4.下列四個人的敘述中，哪些是正確的?

甲：因為 6<7，所以 $\sqrt{6}<\sqrt{7}$

乙：因為 $(0.5)^2$=0.25 且 $(-0.5)^2$=0.25，故 $\sqrt{0.25}=\pm0.5$

丙：因為 9^2=81，且 $(-9)^2$=81，所以 $\sqrt{81}$ 的平方根為 ±9

丁：$-\sqrt{36}$ 為 36 的負平方根

(A)甲、乙 (B)甲、丁 (C)乙、丙 (D)丙、丁

<解析>

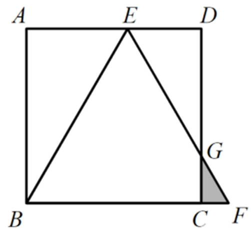
甲:正確。

乙:$\sqrt{0.25}=0.5$。

丙:$\sqrt{81}$=9，9 的平方根是±3 。
丁:正確。
只有甲、丁的敘述是正確的。

(A)5. 一個正方形和一個等邊三角形拼成如圖所示的圖形，已知等邊三角形邊長為 2，則陰影部分的面積為__________.

(A)$\frac{7}{2}\sqrt{3}-6$ (B)$\frac{9}{2}\sqrt{3}-4$ (C)$\frac{5}{2}\sqrt{3}+4$ (D)$\frac{11}{2}\sqrt{3}-8$



<解析>

在 Rt△ABE 中，$\overline{BE}=2$，$\overline{AE}=1$，$\overline{AB}=\sqrt{3}$， 在 Rt△GCF 中，

$CF=2-\sqrt{3}, CG=2\sqrt{3}-3$， $S_{\triangle GCF}=\frac{1}{2}CG\cdot CF=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{7}{2}\sqrt{3}-6$.

(C)6. 小美化簡式子$\frac{1}{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$，最後得到$\frac{m\sqrt{2}+\sqrt{6}}{n}$的形式，且$m$、$n$為整數，若小美化簡過程正確無誤，則 m-n=? (A)-3 (B)-18 (C)-21 (D)-42

<解析>

$$\frac{1}{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}}=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{(6\sqrt{2}-2\sqrt{6})(6\sqrt{2}+2\sqrt{6})}=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{72-24}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}$$

∴.m-n=3-24=-21

(D)7. All positive integer numbers from 1 to 2019, the sum of all positive integer numbers which satisfies $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ divided by $1+2+3+...+n$ is ______.
(A)679063 (B)679054 (C)679060 (D)679057

<解析>

翻譯: 在 1 到 2019 的所有正整數中，滿足$1+2+3+...+n$整除$1^2+2^2+3^2+...+n^2$的所有正整數的和為?

$1+2+3+...+n=\frac{(1+n)n}{2}$，$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{(2n+1)(1+n)n}{6}$，所以滿足題意的$n$滿足$3|(2n+1)$，即$n$除以 3 餘 1，即. $1+4+7+10+...+2017=\frac{(1+2017)\cdot 673}{2}=679057$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

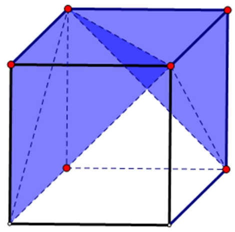
1. 若 $[\,(3x^2-2x-4)-(-x^2-6x+2)\,]\div(x-2)$ 的商式為 $ax+b$，餘式為 c，則 a+b+c=__①__

<解析>

原式$=(4x^2+4x-6)\div(x-2)=4x+12\ldots\ldots18$

故 $a=4$，$b=12$，$c=18$，則 $a+b+c=34$

2. 已知如圖一個立方體，邊長為 1，被切了兩刀，切下陰影的兩塊，則剩下部分幾何體的體積為__②__。



<解析>

剩下的幾何體的體積為正方體減去兩個三棱錐，即 $1-2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

3. 請參考下表計算 $\sqrt{5.5}+\sqrt{570}$ 之值是__③__（取近似值到小數第一位）

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	N^3
55	3025	7.416198	23.45208	166375
56	3136	7.483315	23.66432	175616
57	3249	7.549834	23.87467	185193
58	3364	7.615773	24.08319	195112

<解析>

$$\sqrt{5.5}=\sqrt{\frac{550}{100}}=\frac{\sqrt{550}}{10}=\frac{23.45208}{10}=2.345208$$

$$\sqrt{570}=23.87467$$

$\therefore 2.345208+23.87467=26.219878\fallingdotseq 26.2$

4. 在直角坐標系中，設點 $A(4,-5), B(8,-3), C(m,0), D(0,n)$. 當四邊形 $ABCD$ 的周長最短時，$\frac{m}{n}$ 的值為__④__.

<解析>

B 於 x 軸的對稱點 B'(8, 3)，A 於 y 軸的對稱點 A'(−4, −5)

四邊形周長最小即為 $\overline{A'B'}+\overline{AB}=10\sqrt{2}+2\sqrt{5}$，$\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$

5. 若 x 為正整數，$7x^2+4x-75$ 代表一個質數，則此質數為__⑤__。

<解析>

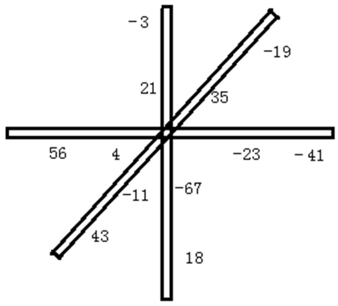
$7x^2+4x-75=(x-3)(7x+25)$ 且它是一個質數

$$\begin{cases}x-3=1\\7x+25=1\end{cases}$$

➔ $x=4$ 或 $x=-\frac{24}{7}$(不合)

$\therefore 7x^2+4x-75=112+16-75=53$

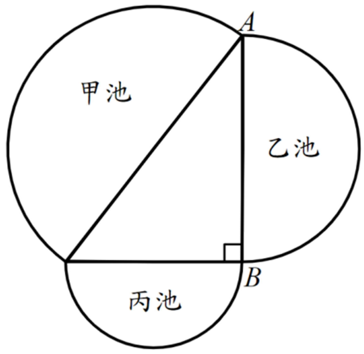
6. 三根長方形木條釘在一起，上面如圖各有 4 個數，若每次從每根木條上各取一個數作乘法可得到一個積，則所有積的和是 ⑥ 。



<解析>

$(-3+21-67+18)(56+4-23-41)(35+43-11-19)=5952$.

7. 親水運動公園開闢戲水池來吸引遊客，建造的戲水池如圖，若甲池的面積是50π，丙池的面積是18π，則請問乙池中的$\overline{AB}=$ ⑦



<解析>

乙池面積$=50\pi-18\pi=32\pi$

$(\frac{\overline{AB}}{2})^2\pi=32\pi\times 2$，$\overline{AB}=16$

8. It is known $y=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$ that when $x=\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots\ldots, \frac{9}{10}, 1$ is taken sequentially, the sum of the values of these functions is obtained.The sum is ⑧ .

<解析>

翻譯:已知 $y=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$，則當 x 依次取 $x=\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots\ldots, \frac{9}{10}, 1$ 時，得到的這些函數值之和為________.

因為 $y=\frac{x^3}{(1-x)^3+x^3}$，所以 $\frac{(1-x)^3}{(1-(1-x))^3+(1-x)^3}=\frac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}$，

因此配對求和得 $f(\frac{1}{10})+f(\frac{2}{10})+f(\frac{3}{10})+\cdots+f(\frac{9}{10})+f(1)=\frac{11}{2}$

三、計算題(共 32 分)※未寫計算過程不予計分

1. 某商人以 400 元買進香蕉一箱，其中腐爛 5 公斤，剩下的每公斤比買價增加 2 元賣出，共賺 50 元，則香蕉每公斤買價多少元?買進多少公斤?(5 分, 5 分)

<解析>

假設每公斤買進 x 元➔買進 $\frac{400}{x}$ 公斤

每公斤賣出$(x+2)$元➔賣出 $(\frac{400}{x}-5)$ 公斤

$(\frac{400}{x}-5)(x+2)=400+50$

$400-5x+\frac{800}{x}-10=450$

$400x-5x^2+800-10x=450x$

$x^2+12x-160=0$，$(x+20)(x-8)=0$，$x=8$ 或 $x=-20$ (不合)

400÷8=50 公斤

答：①每公斤買 8 元②買進 50 公斤

2. 若存在整數 m 使得 $m^2+5m+26$ 能分解成兩個連續的自然數之積，求 m 的值.(12 分)

<解析>設 $m^2+5m+26=(n+2)(n+3)$，則 $m^2-n^2+5(m-n)+20=0$ 即 $(m-n)(m+n+5)=-20$，

由於 $m-n, m+n+5$ 一奇一偶，所以 $\begin{cases} m-n=-1 \\ m+n+5=20 \end{cases}$, $\begin{cases} m-n=-20 \\ m+n+5=1 \end{cases}$, $\begin{cases} m-n=-4 \\ m+n+5=5 \end{cases}$, $\begin{cases} m-n=-5 \\ m+n+5=4 \end{cases}$.

解得 $\begin{cases} m=7 \\ n=8 \end{cases}$, $\begin{cases} m=-12 \\ n=8 \end{cases}$, $\begin{cases} m=-2 \\ n=2 \end{cases}$, $\begin{cases} m=-3 \\ n=2 \end{cases}$.　則 m 的值為 $7,-12,-2,-3$.

3. Express $9\times31^4-37\times31^2+4$ as a standard decomposition.(10 分)

翻譯:將 $9\times31^4-37\times31^2+4$ 表示成標準分解式。(10 分)

<解析>

令 x=31

原式$=9x^4-37x^2+4=(9x^2-1)(x^2-4)=(3x+1)(3x-1)(x+2)(x-2)$

將 x=31 代入

得 $(3x+1)(3x-1)(x+2)(x-2)$=94×92×33×29=2×47×2×2×23×3×11×29

➔ $2^3\times3\times11\times23\times29\times47$

答：$2^3\times3\times11\times23\times29\times47$