2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

(B)1. 記 $n!=1\times2\times3\times.....\times n$，$[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

則方程 $\left[\dfrac{x}{1!}\right]+\left[\dfrac{x}{2!}\right]+\left[\dfrac{x}{3!}\right]+....+\left[\dfrac{x}{10\,!}\right]=3466$ 的整數解為（　　）。

(A)2018 (B)2019 (C)2020 (D)2021

<解析>

$$\left[\frac{2018}{1}\right]+\left[\frac{2018}{1\times2}\right]+\left[\frac{2018}{1\times2\times3}\right]+\left[\frac{2018}{1\times2\times3\times4}\right]+\left[\frac{2018}{1\times2\times3\times4\times5}\right]+\left[\frac{2018}{1\times2\times3\times4\times5\times6}\right]+\left[\frac{2018}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}\right]$$

=2018+1009+[336.33]+[84.08]+[16.81]+[2.80]+[0.40]

=2018+1009+336+84+16+2+0=3464

$$\left[\frac{2019}{1}\right]+\left[\frac{2019}{1\times2}\right]+\left[\frac{2019}{1\times2\times3}\right]+\left[\frac{2019}{1\times2\times3\times4}\right]+\left[\frac{2019}{1\times2\times3\times4\times5}\right]+\left[\frac{2019}{1\times2\times3\times4\times5\times6}\right]+\left[\frac{2019}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}\right]$$

=2019+[1009.5]+[336.5]+[84.125]+[16.825]+[2.80]+[0.40]

=2019+1009+336+84+16+2+0=3466

選 B。

(C)2. 若 $|x-5|+|x+6|=k$ 有實數解，求實數 k 的範圍?

(A) $k\geq10$ (B) $k\leq10$ (C) $k\geq11$ (D) $k\leq11$

<解析>

由三角不等式知:

$|x-5|+|x+6|=|5-x|+|x+6|\geq|(5-x)+(x-6)|=11$

$\therefore$ $|x-5|+|x+6|=k$ 有實數解，則 $k\geq11$

(C)3. $\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_5\dfrac{1}{9}\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}=$（　　）。 (A) -1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{3}{4}$ (D) $-\dfrac{1}{3}$

<解析>

$$\frac{\log_5{}^{\sqrt{2}}\cdot\log_7{}^{9}}{\log_5{}^{\frac{1}{9}}\cdot\log_7{}^{\sqrt[3]{4}}}=\frac{\frac{1}{2}\log_5{}^{2}\cdot2\log_7{}^{3}}{-2\log_5{}^{3}\cdot\frac{2}{3}\log_7{}^{2}}=-\frac{3}{4}$$

(A)4. 化簡 $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$-$\sqrt{5\text{-}\sqrt{24}}$ =?

(A) 3+3$\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ (B) 3+2$\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ (C) 3+$\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ (D) 3-$\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$

<解析>

$\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{17+2\sqrt{72}}=\sqrt{9}+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$

$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore 3+2\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3+3\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(C)5. 已知ΔABC的三個內角A，B，C所對的三邊分別為a，b，c。若ΔABC的面積為6，$c=5$，$\tan A=\frac{4}{3}$，則$a=($　　$)$。

(A) $2\sqrt{13}$　(B) 2　(C) 4　(D) $\sqrt{17}$

<解析>

$\sin A=\frac{4}{5}$，$\cos A=\frac{3}{5}$，$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=6$

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+25-2\times3\times5\times\frac{3}{5}=16$

$\therefore a=4$

(C)6. 試求$5^6-4\times5^5-3\times5^4-8\times5^3-40\times5-35=?$　(A)10　(B)-10　(C)15　(D)-15

<解析>

令$f(x)=x^6-4x^5-3x^4-8x^3-40x-35$

$\because f(x)=(x-5)Q(x)+r$

所求函數值$f(5)$即為

$f(x)$除以$(x-5)$，所得的餘式r

由綜合除法

1	-4	-3	-8	+0	-40	-35	
	+5	+5	+10	+10	+50	+50	5
1	+1	+2	+2	+10	+10	+15	

$\therefore$餘式$r=15$，所求之值為15

(B)7. In ΔABC, $3\sin A+4\cos B=6$, $4\sin B+3\cos A=1$. Find the measure of angle C in terms of π.

(A) $\frac{\pi}{6}$ or $\frac{5\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{6}$　(C) $\frac{\pi}{3}$ or $\frac{2\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{3}$

<解析>

兩式平方相加得$\sin(A+B)=\frac{1}{2}$，所以$A+B=\frac{\pi}{6}$或$A+B=\frac{5\pi}{6}$

若$A+B=\frac{\pi}{6}$，則$A,B\in(0,\frac{\pi}{6})$，所以$\sin A\in(0,\frac{1}{2})$，$\sin B\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$

所以$3\sin A+4\cos B<\frac{3}{2}+4<6$，與已知矛盾。$C=\frac{\pi}{6}$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 二次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(2011)=3$，$f(2012)=1$，$f(2013)=5$，則 $f(2014)=$ ___①___。

<解析>

由牛頓插值法

令 $f(x)=a(x-2011)(x-2012)+b(x-2011)+c$

$\because f(2011)=c$，$c=3$

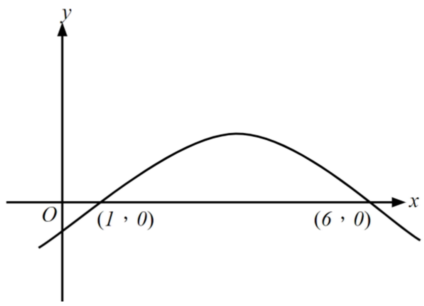
$f(2012)=b+c$，$b+3=1$，$b=-2$

$f(2013)=2a+2b+c$，$2a-4+3=5$，$a=3$

$\therefore f(x)=3(x-2011)(x-2012)-2(x-2011)+3$

$\therefore f(2014)$ =18−6+3=15

2. 設 $y=f(x)$ 為二次函數，其圖形如右，試求 $f(2x)<0$ 的解為 ___②___。



<解析>

$\because y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於(1，0)及(6，0)且開口向下

$\therefore$ 設 $y=f(x)=a(x-1)(x-6)$，其中 $a<0$

➔ $f(2x)=a(2x-1)(2x-6)<0$

➔ $(2x-1)(2x-6)>0$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ 或 $x>3$

3. What is the value of $\sin 615^\circ$ in radical expression? ___③___

翻譯：$\sin 615^\circ=$ ③

<解析> $\sin 615^\circ=-\sin 105^\circ=-\sin(45^\circ+60^\circ)=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，且 $0\le\theta\le\pi$，則 $\sin\theta-\cos\theta$ = ___④___

<解析>

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ ➔ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$

➔ $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$ ➔ $-2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$

➔ $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$ ➔ $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{49}{25}$

$\because \sin\theta\cos\theta<0$ 且 $0\le\theta\le\pi$，故 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{7}{5}$

5. 已知 n 為正整數，n^{101} 是 92 位數，則 $n=$ __⑤__ 。($\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$)

<解析>

$\because n^{101}$ 是 92 位數 $\therefore 91\le\log n^{101}<92$，$91\le 101\cdot\log n<92$

$\rightarrow \dfrac{91}{101}\le\log n<\dfrac{92}{101}$，$0.90099\le\log n<0.91089$

又 $\log 8=\log 2^3=3\log 2=3\times 0.3010=0.9030$

$\log 9=\log 3^2=2\log 3=2\times 0.4771=0.9542$

n=8

6. 已知函數 $f(x)=\lg\left(5^x+\dfrac{4}{5^x}+m\right)$ 的值域為 R，則 m 的取值範圍是 __⑥__ .

<解析>

設 $t=5^x+\dfrac{4}{5^x}$，則 $t\ge 2\sqrt{5^x\cdot\dfrac{4}{5^x}}=4$

$\because f(x)$ 的值域為 R

故 $t+m$ 取所有正實數

$\therefore m\le -4$

7. 一等比級數，前 n 項之和為 48，前 2n 項之和為 60，求前 3n 項之和為 __⑦__ 。

<解析>

$S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=48$ ....(1)

$S_{2n}=\dfrac{a_1(1-r^{2n})}{1-r}=60$ ....(2)

由 $\dfrac{(2)}{(1)}$ 得 $\dfrac{1-r^{2n}}{1-r^n}=1+r^n=\dfrac{5}{4}\rightarrow r^n=\dfrac{1}{4}$ 代入(1)

得 $\dfrac{a_1}{1-r}=64$

$\therefore S_{3n}=\dfrac{a_1(1-r^{3n})}{1-r}=64\cdot$〔$1-(\dfrac{1}{4})^3$〕=63

8. What is the inverse function of $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$?

翻譯: $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函數為__________.

設 $u=x+\sqrt{1+x^2}$ ， $v=x-\sqrt{1+x^2}$

則 $u+v=2x$ ， $uv=-1$

$\therefore f(x)=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$ ➔ $f^3(x)=u+v+3\sqrt[3]{uv}\cdot(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})$

$=2x-3\cdot f(x)$

$\therefore x=\dfrac{f^3(x)+3f(x)}{2}$ ， $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3x}{2}$

三、計算題(共 32 分）※未寫計算過程不予計分

1.甲、乙、丙、丁、戊、己、庚共 7 人排成一列，則甲不排第一位，乙不排第二位，丙不排第三位有多少種排法?(10 分)

<解析>

所求=「全部的排列數」-「甲排第一位或乙排第二位或丙排第三位的排列數」

=7!-(6!+6!+6!-5!-5!-5!+4!)

=5040-(2160-360+24)

=3216(種)

2. 設對所有的實數 x ，皆使 $\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 成立，試求實數 k 之範圍。(10 分)

<解析>

$\because \forall x\in R$ 皆使 $\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$

$\therefore 2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$ ($\because 4x^2+6x+3$ 恆正)

$\therefore 2x^2+(6-2k)x+3-k>0$

$(6-2k)^2-4\cdot 2\cdot(3-k)<0$

➔ $36-24k+4k^2-24+8k<0$

➔ $4k^2-16k+12<0$

➔ $k^2-4k+3<0$

➔ $(k-3)(k-1)<0$

$\therefore 1<k<3$ ，即 k 的範圍為 $1<k<3$

3. Show that 2018 can be expressed as the sum of the squares of 4 distinct positive integers. (12 分)

翻譯：求證：2018 可以寫成四個兩兩不等正整數的平方和的形式。

<解析>

$2018-43^2=2018-1849=169=13^2=12^2+5^2=12^2+4^2+3^2$

$\therefore 2018=12^2+4^2+3^2+43^2$