2017 第十三屆 IMC 國際數學競賽複賽（台灣）

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級解答

一、選擇題：每題 4 分

1	2	3	4	5	6	7
C	B	A	A	D	C	D

二、填充題：每格 6 分

1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{ma-nb}{m-n}$	－8	$\frac{13}{4}$	$-\frac{64}{15}$	576	(3，2)	1	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

三、計算題：每題 8 分　　　※寫出過程，否則不予計分

1. 證：因為 $\sqrt{n(n+1)}<\frac{n+(n+1)}{2}=n+\frac{1}{2}$

所以 $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<1+2+3+\cdots+n+\frac{n}{2}$

$=\frac{n(n+1)+n}{2}=\frac{n^2+2n}{2}<\frac{n^2+2n+1}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}$

故不等式成立，即 $\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{(n+1)^2}{2}$

2. 解：∵ α，β 為 $x^2+5x+3=0$ 之二根；γ，δ 為 $2x^2-4x-3=0$ 之二根

∴ $\begin{cases}\alpha+\beta=-5\\ \alpha\cdot\beta=3\end{cases}$，$\begin{cases}\gamma+\delta=2\\ \gamma\cdot\delta=-\frac{3}{2}\end{cases}$ 且 $\begin{cases}\alpha^2+5\alpha+3=0\\ \beta^2+5\beta+3=0\end{cases}$

∴ $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)=[\alpha^2-(\gamma+\delta)\alpha+\gamma\delta][\beta^2-(\gamma+\delta)\beta+\gamma\delta]$

$=(\alpha^2-2\alpha-\frac{3}{2})(\beta^2-2\beta-\frac{3}{2})=(-5\alpha-3-2\alpha-\frac{3}{2})(-5\beta-3-2\beta-\frac{3}{2})=(-7\alpha-\frac{9}{2})(-7\beta-\frac{9}{2})$

$=49\alpha\beta+\frac{63}{2}(\alpha+\beta)+\frac{81}{4}=49\times3+\frac{63}{2}\times(-5)+\frac{81}{4}=147-\frac{315}{2}+\frac{81}{4}=\frac{39}{4}$

答：$\frac{39}{4}$

3. 解：∵ $(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$

令 $x=-\frac{1}{3}$ 得 $(1-\frac{1}{3})^n=C_0^n+C_1^n(-\frac{1}{3})+C_2^n(-\frac{1}{3})^2+\cdots+C_n^n(-\frac{1}{3})^n$

$\Rightarrow(\frac{2}{3})^n=1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+(-\frac{1}{3})^3C_3^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n\Rightarrow(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{5000}$

$\Rightarrow n\log\frac{2}{3}<\log\frac{1}{5000}\Rightarrow n(\log2-\log3)<\log2-\log10000$

$\Rightarrow n(0.301-0.4771)<0.301-4\Rightarrow n(-0.1761)<-3.6990\Rightarrow n>\frac{3.699}{0.1761}=21.005$

$\Rightarrow n\geq22$，故最小正整數 n 之值 $=22$

答：22