

2017 第十三屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高 中 一 年 級 試 卷

考試時間：90 分鐘

卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻開》

2017 第十三屆 **IMC** 國際數學競賽複賽(台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題 (每題 4 分, 共 28 分)

- () 1. 設多項式 $f(x)$ 除以 $2x - 3$ 的商為 $Q(x)$, 餘式為 r , 則下列何者錯誤?
- (A) $f(x)$ 除以 $x - \frac{3}{2}$ 的商為 $2Q(x)$, 餘式為 r
(B) $f(x)$ 除以 $5(2x - 3)$ 的商為 $\frac{Q(x)}{5}$, 餘式為 r
(C) $xf(x)$ 除以 $2x - 3$ 的商為 $xQ(x)$, 餘式為 r
(D) $f(\frac{x}{2})$ 除以 $x - 3$ 的商為 $Q(\frac{x}{2})$, 餘式為 r
- () 2. 設 $y = 2^x$ 的圖形為 F , $y = 0.5^x$ 的圖形為 G , 下列何者錯誤?
- (A) F 為由左往右逐漸升高 (B) G 為由左往右逐漸升高
(C) F 與 G 均以 x 軸為漸近線 (D) G 與 $y = 2^{-x}$ 之圖形一致
- () 3. 已知三角形的三邊長分別為 a 、 b 、 c , 且滿足 $a^3 + 2b^3 = 3ab^2$, 則此三角形的形狀為下列何者?
- (A) 等腰三角形 (B) 等邊三角形
(C) 直角三角形 (D) 銳角三角形
- () 4. 設 $f(x)$ 為實係數多項式, $a, b \in R, a < b$, 則下列敘述何者正確?
- (A) 若 $f(a)f(b) < 0$, 則 $f(x) = 0$ 在 a, b 間至少有一個實根
(B) 若 $f(a)f(b) < 0$, 則 $f(x) = 0$ 在 a, b 間可能恰有兩個實根
(C) 若 $f(a)f(b) > 0$, 則 $f(x) = 0$ 在 a, b 間無實根
(D) 若 $f(x) = 0$ 在 a, b 間至少有一實根, 則 $f(a)f(b) < 0$
- () 5. 設函數 $f(x + 5) = f(x)$ 對任何實數 x 都成立, 且當 $3 < x \leq 8$ 時, $f(x) = 2x + 7$, 則下列敘述何者錯誤?
- (A) $f(5) = 17$ (B) $f(-36) = 15$ (C) $f(1003) = 23$ (D) $f(0) = 0$

- () 6. 設 $A \in N$ 且 $1 \leq A \leq 500$ ，則下列何者正確？
- (A) 不為 5 的倍數之 A 值有 450 個
 (B) 為 2 或 3 的倍數之 A 值有 416 個
 (C) 為完全平方數或完全立方數之 A 值有 27 個
 (D) 不為 2，不為 3 且不為 5 的倍數之 A 值有 366 個
- () 7. 五種不同的酒倒入三個酒杯，若一個杯子只能倒一種酒，而且不能有空杯，下列選項何者錯誤？
- (A) 杯子相同，各杯子的酒可相同，有 35 種倒法
 (B) 杯子不同，各杯的酒亦不同，有 60 種倒法
 (C) 杯子相同，各杯子的酒不同，有 10 種倒法
 (D) 杯子不同，各杯的酒可相同，但其中至少有一杯是啤酒，有 60 種倒法

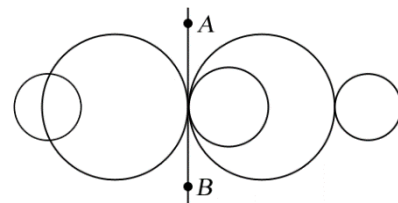
二、填充題（每格 6 分，共 48 分）

1. 設自然數 $m \neq n$ ，若一等差數列的第 m 項為 a ，第 n 項為 b ，則第 $m+n$ 項為 ①。
2. 右式是小明利用綜合除法計算三次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的算式，因不小心將飲料翻倒在計算紙上，所以只能辨識部分數字：（無法辨識的數字以英文字母代替）若小明沒有計算錯誤，求 $a + b + c + d$ 的值為 ②。

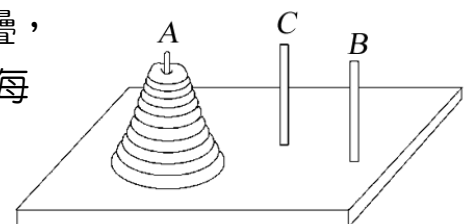
$$\begin{array}{r} a \quad +b \quad +c \quad +d \\ +) \quad \quad \quad 5 \quad +e \quad +f \\ \hline \quad \quad \quad g \quad +3 \quad +h \quad \underline{-8} \end{array} \Bigg| 1$$

3. The solution of a inequality $x^{x\sqrt{x}} > (x\sqrt{x})^x$ is $x > a$ or $b < x < c$. To find $a + b + c =$ ③.
4. If an geometric sequence is $x, 3x + 3, 4x + 4, \dots$, find out the value of the fourth item ④. (Write a constant)

5. 右圖，由 A 至 B 之一筆畫有 ⑤ 種方法。

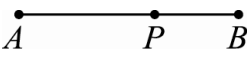


6. 如右圖， A 柱中有 n 個大小不同的圓盤由大而小往上堆疊，若要從 A 柱全部搬移至 B 柱，每次只能搬動一圓盤，且每次都必須先經中間柱（不可由 A 直接放入 B ）且大盤不可放在小盤之上，設共要搬動 a_n 次，若 $a_{n+1} = pa_n + k$ ，求數對 $(p, k) =$ ⑥。



7. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$, $B = \{0, 1, 4, 5\}$, 則 $A \cap B$ 中元素的個數為 ⑦。

8. 義大利畫家達文西把一線段分成兩段不相等的線段, 使得較長的一段與較短的一段之比等於全段與較長一段之比, 而這種比值稱為黃金比例, 常用 φ 表示:

 $\varphi = \frac{AP}{BP} = \frac{AB}{AP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 求 $BP = \alpha AB$ 時的 α 值為 ⑧。

三、計算題 (每題 8 分, 共 24 分)

1. 證明: $\sqrt{1 \times 2} + \sqrt{2 \times 3} + \sqrt{3 \times 4} + \dots + \sqrt{n(n+1)} < \frac{(n+1)^2}{2}$ 。

2. 設 α, β 為 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 之二根; γ, δ 為 $2x^2 - 4x - 3 = 0$ 之二根, 求 $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)$ 之值。

3. 已知 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, 試求滿足不等式 $1 - \frac{1}{3}C_1^n + (-\frac{1}{3})^2 C_2^n + (-\frac{1}{3})^3 C_3^n + \dots + (-\frac{1}{3})^n C_n^n < \frac{1}{5000}$ 最小正整數 n 之值為何?