

2017 第十三屆 IMC 國際數學競賽複賽 (台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級解答

一、選擇題：每題 4 分

1	2	3	4	5	6	7
C	D	D	A	D	D	B

二、填充題：每格 6 分

1	2	3	4	5	6	7	8
$2n^2 + n$	168.944	11	$\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 5$	$c > d > e > b > a$	32	等腰	$-\frac{3}{13}$

三、計算題：每題 8 分

※寫出過程，否則不予計分

1. 解：(1) 由 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3x - 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5u + 2v \\ y = -3u + v \end{cases} \therefore \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-5} \therefore$ 此為唯一解

(2) 但 $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases} \therefore a = -5, b = 2, \text{且 } c = -3, d = 1。$

答： $a = -5, b = 2, c = -3, d = 1$

2. 解：設本金 P ，年利率 12.5%，複利計算，故 n 年後本利和為 $P(1 + 12.5\%)^n = P(\frac{9}{8})^n$

令 $P(\frac{9}{8})^n > 2P$ ，則 $(\frac{9}{8})^n > 2$ ，兩邊取 \log ，得 $n \log \frac{9}{8} > \log 2$

即 $n(\log 9 - \log 8) > \log 2 \Rightarrow n > \frac{\log 2}{2 \log 3 - 3 \log 2} = \frac{0.3010}{2 \times 0.4771 - 3 \times 0.3010} \doteq 5.9 \Rightarrow n \geq 6$

故至少 6 年才能使本利和超過本金的 2 倍。

答：6 年

3. 解：(1) 初速度 $v_0 = 600 \text{ m/sec} \Rightarrow$ 水平分速度 $v_x = v_0 \cos \theta = 480 \text{ m/sec}$

鉛直分速度 $v_y = v_0 \sin \theta = 360 \text{ m/sec}$

第 t 秒末 $\begin{cases} x = v_x t = 480t \\ y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = 360t - 5t^2 \end{cases} \Rightarrow y = 360(\frac{x}{480}) - 5(\frac{x}{480})^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{46080}x^2$

$\therefore y$ 是 x 的二次函數。

(2) 令 $y = 0 \therefore 360t - 5t^2 = 0 \therefore t = 0$ 或 $t = 72$

$\therefore B(480 \times 72, 0)$ ，即最大水平距離為 $480 \times 72 = 34560$ 公尺。

而當 $t = \frac{72}{2} = 36$ 時，最大高度為 $360 \times 36 - 5 \times (36)^2 = 6480$ 公尺。

答：(1) 略 (2) 6480 公尺，34560 公尺

