

2017 第十三屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

高 中 二 年 級 試 卷

考試時間：90 分鐘

卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻開》

2017 第十三屆 **MATH IMC** 國際數學競賽複賽(台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題 (每題 4 分, 共 28 分)

- () 1. 圓內切四邊形 $ABCD$ 中, $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$, $\angle C = 60^\circ$, $\angle D = 105^\circ$, 下列何者錯誤? (A) $\overline{BD} = 2\sqrt{3}$ (B) 此圓半徑 = 2 (C) $\overline{AC} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ (D) $\angle ACB = 30^\circ$
- () 2. θ 是第二象限角, 則下列敘述何者正確?
(A) $\sin \frac{\theta}{2} < 0$ (B) $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ (C) $\tan \frac{\theta}{2} < 0$ (D) $\cot \frac{\theta}{2} > 0$
- () 3. 設 A, B 均為 2 階方陣, I 為 2 階單位方陣, 下列敘述何者正確?
(A) 若 $A^2 = O$, 則 $A = O$ (B) 若 $A^2 = I$, 則 $A = I$ 或 $A = -I$
(C) 若 $A^2 = A$, 則 $A = O$ 或 $A = I$ (D) 若 $AB = O$, $\det A \neq 0$, 則 $B = O$
- () 4. 下列不等式, 何者無實解?
(A) $-x^2 + 3x - 5 > 0$ (B) $-x^2 + 2x - 3 < 0$
(C) $x^2 + 3x - 1 > 0$ (D) $x^2 - x + 2 > 0$
- () 5. 滿足下列條件的 $\triangle ABC$, 何者恰有一解?
(A) $a = 1, b = \sqrt{2}, \angle A = 30^\circ$ (B) $\angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ$
(C) $a = 2, b = 3, c = 5$ (D) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}, b = 2, \angle A = 105^\circ$
- () 6. 兩圓 $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 外公切線夾角為 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 則下列敘述何者錯誤?
(A) 外公切線段長為 $\sqrt{22}$ (B) 內公切線段長為 $\sqrt{10}$
(C) 兩外公切線的交點為 $(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$ (D) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$
- () 7. $\triangle ABC$ 中, $\overline{CA} = 3, \overline{CB} = 5, \angle ACB = 120^\circ$, 則下列敘述, 何者錯誤?
(A) $\overline{AB} = 7$ (B) $\triangle ABC$ 面積 = $\frac{15}{4}$
(C) A 到 \overline{BC} 之距離為 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ (D) \overline{BC} 邊上的中線長為 $\frac{\sqrt{91}}{2}$

二、填充題（每格 6 分，共 48 分）

1. 已知一數列的遞迴定義式為 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} - a_n = 4n + 3 \end{cases} (n \in N)$ ，試求此數列的一般項 $a_n =$ ①。

2. 某班 50 位學生的身高以 165 公分，175 公分為界分成三層，其人數如下表：

層次	身高	人數
一	165 公分以下	15
二	165~175 公分	27
三	175 公分以上	8

在第一層中抽取 3 人，其身高分別為 154 公分，160 公分，163 公分；在第二層中抽取 5 人，其身高分別為 175 公分，168 公分，166 公分，173 公分，171 公分；在第三層中抽取 2 人，其身高分別為 185 公分，179 公分；試求該班學生的平均身高為 ② 公分。

3. 設 n, m 為兩自然數，如果 $C_m^n : C_m^{n+1} : C_m^{n+2} = 6 : 9 : 13$ ，則 $n =$ ③。

4. A, B , and C are three know types of alloy that contains gold, silver, and copper with weight ratios of 5:2:1, 2:5:1, and 3:1:4, respectively. If one is trying to make a new type of alloy weighing 9 kilograms that has same amount of each alloy, how much of alloys A, B , and C does one need? ④.

5. 比較 $a = \sin 587^\circ$ ， $b = \cos(-589^\circ)$ ， $c = \tan 951^\circ$ ， $d = \cos 1781^\circ$ ， $e = \sin(-913^\circ)$ 的大小順序 ⑤。

6. The point P is inside of a square $ABCD$, and $\overline{AP} = 7$ ， $\overline{BP} = 5$ ， $\overline{CP} = 1$. Calculate the area of the square $ABCD$ ⑥.

7. 若 $\triangle ABC$ 的三內角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 滿足 $\sin A = 2\sin C \cos B$ ，則 $\triangle ABC$ 的形狀為 ⑦ 三角形。

8. 已知 $xyz \neq 0$ ，若 $9x - 4y + 3z = -7x + 2y + 15z = 13x - 8y - z$ ，試求 $\frac{3x^2 - 2y^2 - z^2 - 5xy}{4x^2 - 5y^2 - 6z^2 + 2xz}$ 之值 ⑧。

三、計算題（每題 8 分，共 24 分）

1. 設 $xyuv \neq 0$ ，若解 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3x - 5y \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ ，求常數 a, b, c, d 。
2. 設年利率為 12.5%，若依複利計算，則至少要多少年（取整數年數），本利和才會超過本金的 2 倍？（ $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ）
3. 門砲的砲口與地平面成仰角 θ ，以 600 公尺/秒的初速度發射一枚砲彈，設第 t 秒末砲彈的水平距離為 x ，高度為 y （只受重力影響），已知 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，重力加速度 $g = 10$ 公尺/秒²。(1) 證明： y 是 x 的二次函數。(2) 求砲彈的最大高度與最大水平距離。