

2017 第十三屆 IMC 國際數學競賽複賽 (台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國中二年級解答

一、選擇題：每題 4 分

1	2	3	4	5	6	7
B	D	B	C	A	C	A

二、填充題：每格 6 分

1	2	3	4
2	7	60°	9
5	6	7	8
$\frac{3}{8}$	16	15	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

三、計算題：每題 8 分

※寫出過程，否則不予計分

1. 解：由條件知 $\Delta = (3a-1)^2 - 4(2a^2-1) = a^2 - 6a + 5 \geq 0$ ，解得 $a \geq 5$ 或 $a \leq 1$ 。

又由根與係數的關係知 $x_1 + x_2 = -(3a-1)$ ， $x_1 x_2 = 2a^2 - 1$ ，

$$\begin{aligned} \text{於是 } (3x_1 - x_2)(x_1 - 3x_2) &= 3(x_1^2 + x_2^2) - 10x_1 x_2 = 3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2 \\ &= 3(3a-1)^2 - 16(2a^2-1) = -5a^2 - 18a + 19, \end{aligned}$$

由 $-5a^2 - 18a + 19 = -80$ ，解得 $a = 3$ (捨去) 或 $a = -\frac{33}{5}$ 。

答： $a = -\frac{33}{5}$

2. 解：如圖，由勾股定理知 $AD = 9$ ， $BD = 16$ ，所以 $AB = AD + BD = 25$ 。

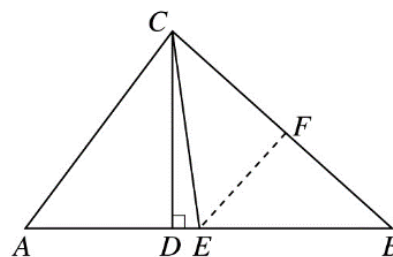
故由勾股定理逆定理知 $\triangle ACB$ 為直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ 。作 $EF \perp BC$ ，垂足為 F 。

設 $EF = x$ ，由 $\angle ECF = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$ ，得 $CF = x$ ，於是 $BF = 20 - x$ 。

由於 $EF \parallel AC$ ，所以 $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}$ ，即 $\frac{x}{15} = \frac{20-x}{20}$ ，

解得 $x = \frac{60}{7}$ ，所以 $CE = \sqrt{2}x = \frac{60\sqrt{2}}{7}$ 。

答： $\frac{60\sqrt{2}}{7}$



3. 解：設每個新輪胎報廢時的總磨損量為 k ，則安裝在前輪的輪胎每行駛1公里，磨損量為 $\frac{k}{5000}$ ，安裝在後輪的輪胎每行駛1公里的磨損量為 $\frac{k}{3000}$ 。

又設一對新輪胎交換位置前走了 x 公里，交換位置後走了 y 公里。

分別以一個輪胎的總磨損量為等量關係列方程式，有
$$\begin{cases} \frac{kx}{5000} + \frac{ky}{3000} = k \\ \frac{ky}{5000} + \frac{kx}{3000} = k \end{cases},$$

兩式相加，得 $\frac{k(x+y)}{5000} + \frac{k(x+y)}{3000} = 2k$ ，則 $x+y = \frac{2}{\frac{1}{5000} + \frac{1}{3000}} = 3750$ 。

答：3750公里

