

2017 第十三屆 國際數學競賽複賽 (台灣)

2017 Thirteenth International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級解答

一、選擇題：每題 4 分

1	2	3	4	5	6	7
A	C	B	B	C	A	D

二、填充題：每格 6 分

1	2	3	4
156	33、56、65	0	735
5	6	7	8
a, b	4	60	$\frac{1}{3}$

三、計算題：每題 8 分 ※寫出過程，否則不予計分

1. 解：令 $2006 = n + (n+1) + \dots + m$

$$4012 = (m+n)(m-n+1) = 2^2 \times 1003 = 2^2 \times 17 \times 59$$

$\because 2 \leq m-n+1 < m+n$ ，又 $(m+n) + (m-n+1) = 2m+1$ 是奇數

$$\rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c} m+n & 68 & \cancel{2 \times 59} & 17 \times 59 & \cancel{2 \times 17 \times 59} & 2^2 \times 59 \\ \hline m-n+1 & 59 & \cancel{2 \times 17} & 4 & 2 & 17 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m+n=68 \\ m-n+1=59 \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=17 \times 59 \\ m-n+1=4 \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=2^2 \times 59 \\ m-n+1=17 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} m & 63 & 503 & 126 \\ \hline n & 5 & 500 & 110 \end{array}$$

答：① $5 + 6 + 7 + \dots + 63 = 2006$

② $500 + 501 + 502 + 503 = 2006$

③ $110 + 111 + 112 + \dots + 126 = 2006$

2. 證：① 作 \overline{AB} ， \overline{CH} 延長線交於 Q ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{AH} = \overline{AH}$ ， $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

$$\therefore \triangle AQH \cong \triangle ACH (ASA) \quad \therefore \overline{AQ} = \overline{AC} \quad \therefore \overline{QH} = \overline{CH}$$

② 作 $\overline{BE} \parallel \overline{CQ}$ 交 \overline{AH} 於 E

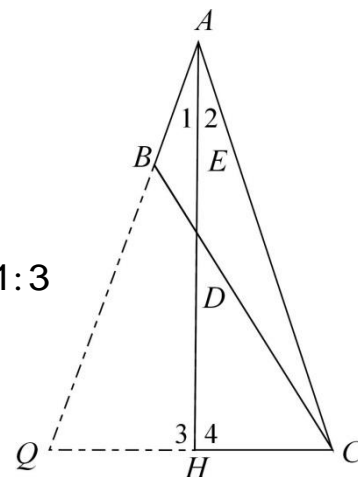
③ $\triangle AQH$ 中 $\overline{BE} \parallel \overline{QH}$ ， $\overline{AB} : \overline{AQ} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 3 \quad \therefore \overline{BE} : \overline{QH} = \overline{BE} : \overline{CH} = 1 : 3$

④ $\triangle BED \sim \triangle CHD \quad \therefore \overline{DE} : \overline{DH} = \overline{BE} : \overline{CH} = 1 : 3$

⑤ $\triangle AQH$ 中， $\overline{BE} \parallel \overline{QH} \quad \therefore \overline{AE} : \overline{HE} = \overline{AB} : \overline{BQ} = 1 : 2$

⑥ 令 $\overline{DE} = a \rightarrow \overline{DH} = 3a$ ， $\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{HE} = \frac{1}{2} \times 4a = 2a$

⑦ $\overline{AD} = 2a + a = 3a$ ， $\overline{DH} = 3a \quad \therefore \overline{AD} = \overline{DH}$



3. 解：如圖，作 $CE \perp AB$ 於 E ，則 $CE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

$$\text{所以 } BE = AB - AE = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{4 - \sqrt{6}}{2} ;$$

$$\text{又 } BC^2 = CE^2 + BE^2 ,$$

$$\text{所以 } BC = \sqrt{CE^2 + BE^2} = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 1 .$$

再過 D 作 $DF \perp BC$ ，交 CB 延長線於 F ，並設 $DF = CF = x$ ，

$$\text{則 } BF = x - BC = x + 1 - \sqrt{6} ;$$

又 $\text{Rt}\triangle DFB \sim \text{Rt}\triangle CEB$ ，所以 $DF : BF = CE : BE$ ，

$$\text{即 } x : (x + 1 - \sqrt{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{4 - \sqrt{6}}{2} , \text{ 所以 } x = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{2} .$$

$$\text{所以 } S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}BC \cdot DF = \frac{1}{2} \times (\sqrt{6} - 1) \times \frac{3 + 2\sqrt{6}}{2} = \frac{9 + \sqrt{6}}{4} .$$

$$\text{答： } BC = \sqrt{6} - 1 , S_{\triangle BDC} = \frac{9 + \sqrt{6}}{4}$$

