2017 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2017 International Mathematics Primary Contest (Taiwan)

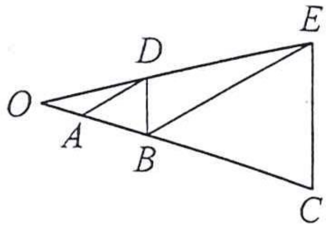
高中一年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 10 分)

(B)1. 如右圖，$\overline{AD}//\overline{BE}$，$\overline{BD}//\overline{CE}$，且 $\overline{OA}=4$，$\overline{AB}=x$，$\overline{BC}=x+10$，則 x=?

(A)6 (B) $2\sqrt{10}$ (C) $4\sqrt{10}$ (D)20。



解析:

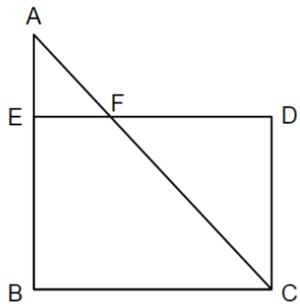
在 ΔOBE 中，$\overline{AD}//\overline{BE}$，$\therefore \overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OD}:\overline{OE}$ ....①

在 ΔOCE 中，$\overline{BD}//\overline{CE}$，$\therefore \overline{OD}:\overline{OE}=\overline{OB}:\overline{OC}$ ....②

由①②可得，$\therefore \overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OB}:\overline{OC}$

$\therefore 4:(4+x)=(4+x):\left[4+x+(x+10)\right]$，$(4+x)^2=4(2x+14)$，$x=\pm 2\sqrt{10}$ (取 $x=2\sqrt{10}$)。

(C)2. 如右圖，ΔABC 中，$\angle B=90^\circ$，BCDE 為矩形，$\overline{AC}$ 與 $\overline{DE}$ 相交於 F，已知 $\overline{EF}:\overline{FD}=1:2$，則 $\Delta AEF:\Delta CDF:$梯形$BCFE$ =?



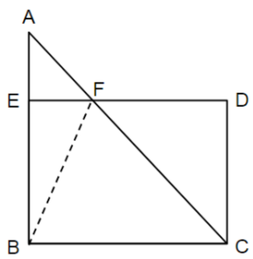
(A)1:2:4

(B)1:2:6

(C)1:4:8

(D)1:4:9

解析: $\because \Delta AEF \sim \Delta CDF$



$\therefore \Delta AEF:\Delta CDF=\overline{EF}^2:\overline{DF}^2=1:4$

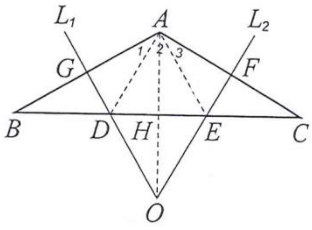
設 $\Delta AEF=a$，則 $\Delta CDF=4a$

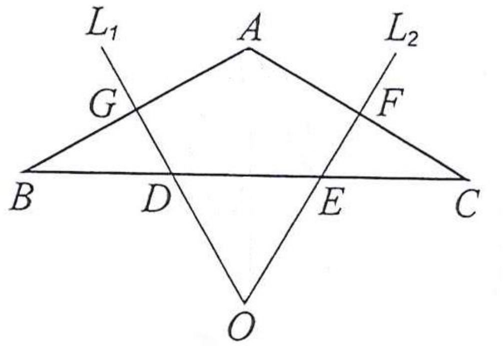
連接 $\overline{BF}$，$\Delta BEF=\frac{1}{2}\Delta CDF=2a$

$\Delta CBF=2a+4a=6a$

ΔAEF 面積: ΔCDF 面積: 梯形 BCFE 面積=a:4a:(2a+6a)=1:4:8。

(**B**)3. 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中垂線 L_1、L_2 相交於 O，且與 ΔABC 的三邊長分別交於 G、D、E、F 四點，若 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=2\sqrt{3}$，則四邊形 AGOF 的外接圓面積為多少平方單位?(A) 8π (B) 9π (C) 12π (D) 16π。





解析:

$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=\overline{AE}$

ΔADE 為正三角形，

$\angle 1=\angle 3=30°$

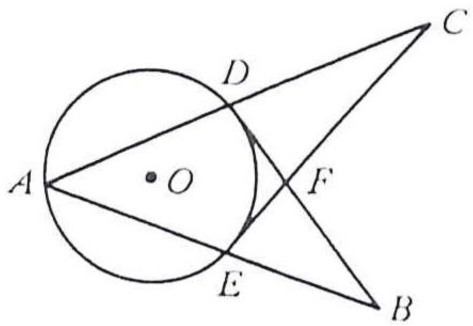
又 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}=6:6\sqrt{3}$ ➔ $\overline{AB}=6$

➔ $\overline{AG}=3$，則鳶形 AGOF 的外接圓直徑 $\overline{AO}=2\overline{AH}=6$，半徑=3

故面積=9π 平方單位。

(**D**)4. 如右圖，$\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 分別切圓於 D 點、E 點，求 $3\angle A+\angle B+\angle C$=?

(A) $120°$ (B) $150°$ (C) $160°$ (D) $180°$。



解析:

連接 $\overline{OD}$、$\overline{OE}$，$\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 為切線

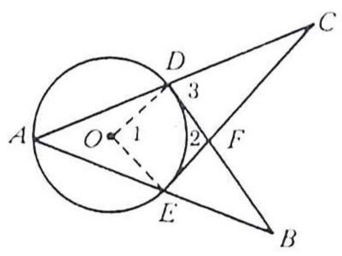
$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 1=2\angle A$

又 $\angle 2=\angle 3+\angle C$

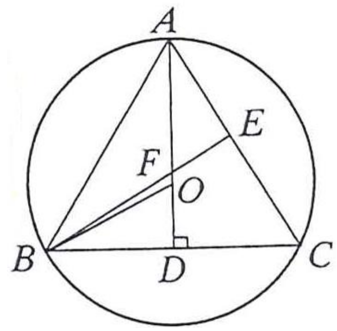
➔ $2\angle A+\angle 3+\angle C=180°$，又 $\angle 3=\angle A+\angle B$

➔ $2\angle A+\angle A+\angle B+\angle C=180°$

$\therefore 3\angle A+\angle B+\angle C=180°$。



(c)5. 如圖，圓 O 為 ΔABC 的外接圓，$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{AE}=\overline{CE}$，則 $\overline{OF}$ 的長為多少?



(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{11}{12}$ (D)1 。

解析:

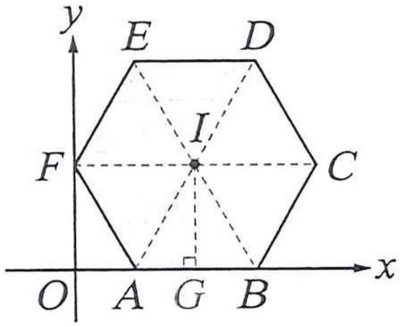
$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{AE}=\overline{CE}$，$\therefore \overline{BE}$ 為中線，O 為外心

$\therefore \overline{AD}$ 為中線，F 為重心，$\overline{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

設 $\overline{BO}=\overline{OA}=x$，$\overline{OD}=8-x$，$\therefore \overline{BO}^2=\overline{BD}^2+\overline{OD}^2$

$x^2=6^2+(8-x)^2 \Rightarrow x=\frac{25}{4}$，$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{AF}=\frac{25}{4}-\frac{2}{3}\times 8=\frac{11}{12}$ 。

(c)6. 如右圖，正六邊形 ABCDEF 中，頂點 A、B 在 x 軸上，F 在 y 軸上，且 A 點的坐標為(1,0)，若 I 點為正六邊形 ABCDEF 的內心，且其坐標為(a, b)，則 a^2+b^2 之值為何?(A)5 (B)6 (C)7 (D)8



解析:

$\because \angle OAF=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$，$\angle FOA=90^\circ$，$\overline{OA}=1$

$\therefore \overline{OF}=\sqrt{3}$，$\overline{AF}=2\overline{OA}=2$

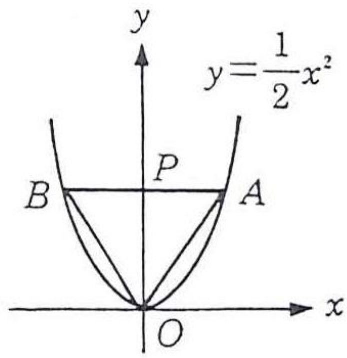
設 $\overline{IG}\perp\overline{AB}$ 於 G

則 b= $\overline{IG}=\overline{OF}=\sqrt{3}$，又 a= $\overline{IF}=\overline{AF}=2$

$\therefore a^2+b^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$

(A)7. 拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 與平行 x 軸之直線交於 A、B 兩點，若 ΔAOB 為正三角形，則 A 點的坐標=? (A) $(2\sqrt{3},6)$ (B) $(3\sqrt{3},5)$ (C) $(3\sqrt{3},6)$ (D) $(4\sqrt{3},5)$

解析:



設 A 點的橫坐標為 a, 縱坐標為 b

由 $y=\frac{1}{2}x^2$ ，得 $b=\frac{1}{2}a^2$ ....①

又 $\overline{OA}=\overline{OB}=2a$

在 ΔAOP 中，由商高定理知 $b^2=(2a)^2-a^2$

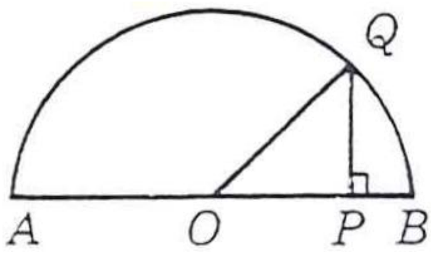
➔ $b=\pm\sqrt{3}a$ (取 $b=\sqrt{3}a$).......②

由①②得知➔ $\frac{1}{2}a^2=\sqrt{3}a$ ， $\frac{1}{2}a=\sqrt{3}$ ， $a=2\sqrt{3}$

$\therefore a=2\sqrt{3}$ ， $b=6$ ，故 A($2\sqrt{3},6$)。

(B)8. 右圖中，Q 是以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上的一點，O 為圓心， $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$ ， $\overline{OB}=6$ 。設 $\overline{OP}=x$ ，當 x 是多少時， ΔOPQ 的面積最大?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $5\sqrt{3}$



解析:

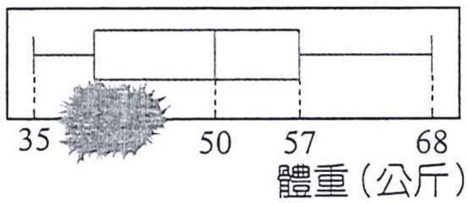
$\because \overline{OP}=x$ ， $\overline{OQ}=6$ ， $y=\Delta OPQ$ 的面積 $=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{6^2-x^2}$

故 $y^2=\frac{1}{4}x^2(36-x^2)=-\frac{1}{4}(x^2-18)^2+81\le 81$

當 $x^2=18$ ， y^2 有最大值為 81

$x=3\sqrt{2}$ ， ΔOPQ 的面積為最大。

(**B**)9. 如右圖，姿雅將她與五位好友的體重繪製成盒狀圖，但不慎打翻飲料，圖形上沾上污漬，導致第一四分位數 Q_1 無法辨識。已知她們六人體重的算術平均數與中位數相同，則 Q_1 之值為何?



(A)39　(B)40　(C)41　(D)42

解析:

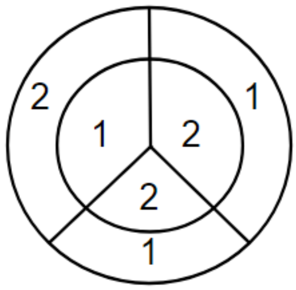
設 $Q_1=x$

$6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$，第 2 位體重為 x 公斤

$6\times\frac{2}{4}=3$，第 3、4 位體重和為 50×2=100 公斤

$6\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$，第 5 位體重為 57 公斤，35+x+100+57+68=50×6，x=40

(**C**)10. 如右圖，標靶中的兩個同心圓半徑分別為 40 公分、80 公分，且兩圓皆被平分成三等份(分成六區)，射中標靶即可得 1 分或 2 分。如果阿兩每射必中，則他射得 2 分的機率為何?



(A) $\frac{1}{24}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{5}{12}$　(D) $\frac{25}{144}$

解析:

半徑為 40:80=1:2，環狀面積:小圓面積=3:1

環狀 2 分占 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$，小圓 2 分占 $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{12}$，射得 2 分機率= $\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$

(A)11. 計算$365^2-366\times364+367\times368-366\times369$之值為何?

(A)3 (B)4 (C)13 (D)14

解析:

設 a=365

原式=$a^2-(a+1)\times(a-1)+(a+2)\times(a+3)-(a+1)\times(a+4)$=3

(D)12. 化簡$\sqrt{7+\sqrt{45}}-\sqrt{7-\sqrt{45}}=?$

(A)$6\sqrt{5}$ (B)$3\sqrt{10}$ (C)$\sqrt{5}$ (D)$\sqrt{10}$ 。

解析:

令$x=\sqrt{7+\sqrt{45}}-\sqrt{7-\sqrt{45}}$

➔$x^2=7+\sqrt{45}+7-\sqrt{45}-2\sqrt{(7+\sqrt{45})(7-\sqrt{45})}=14-2\sqrt{49-45}=10$

➔$x=\pm\sqrt{10}$取正數。

(B)13. 已知$2x^2-3x-7=a(x-1)^2+b(x-1)+c$，求$a\times b\times c$=?

(A)16 (B)-16 (C)14 (D)-14。

解析:

①左右比較➔a=2

②令 x=1，代入$2x^2-3x-7=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

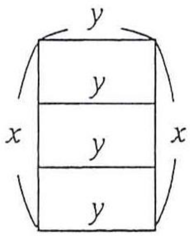
➔2-3-7=c，c=-8

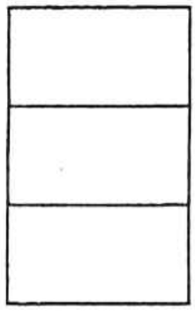
③令 x=0，代入-7=2-b-8，b=1

$a\times b\times c$=2×(-8)×1=-16。

(C)14. A "mesh" area of 8 square meters with a wire, as shown, how many meters of wire should he prepare at least? (excluding wire thickness)

翻譯: 用鐵絲圍成面積 8 平方公尺的「目」字形區域，如圖所示，則他至少要準備多少公尺的鐵絲? (鐵絲厚度不計)





(A)8 (B)12 (C)16 (D)20。

解析: 如圖所示設長為 x，寬為 y➔ xy=8

又鐵絲全長為 2x+4y 由算幾不等式得 $2x+4y\geq 2\sqrt{2x\cdot 4y}$

➔ $2x+4y\geq 2\sqrt{8\times 8}$ ➔ $2x+4y\geq 16$

即至少要準備 16 公尺的鐵絲。

(C)15. 以 $333x+333$ 除 $-5x^2+6x-2$ 的餘式為何?

(A)-12 (B) $-\frac{12}{333}$ (C)-13(D) $-\frac{13}{333}$ 。

解析:

①A= $-5x^2+6x-2$ ，B= $x+1$

A÷B 得商 $-5x+11$ ，餘式=-13

A=B×(-5x+11)+(-13)

②333x+333=333(x+1)=333B

➔A=333B× $\frac{1}{333}$ (-5x+11)+(-13)

餘式為-13。

(D)16. 設一等差數列前 n 項的和為 S_n，若.S_{10}=6，S_{20}=20，則 S_{30}=?

(A)26 (B)32 (C)36 (D)42。

解析:

令 S_{30}=x➔6, 20-6, x-20 成等差數列

➔2×14=6+x-20

➔x=42，即 S_{30}=42。

(A)17. 多項式 x^3+x^2+ax+7 除以 x^2-2x+b 所得到的商式為 $x+3$，餘式 $-x+4$，求 $a\times b$ =?(A)-6 (B)6 (C)-5 (D)5。

解析:

① $x^3+x^2+ax+7=(x^2-2x+b)(x+3)+(-x+4)$

x^3+x^2+ax+7 +x-4=$(x^2-2x+b)(x+3)$

x^3+x^2+ax+7 +x-4=$(x^2-2x+b)(x+3)$

➔3b=3，b=1

② x^3+x^2+ax+7 +x-4=$(x^2-2x+1)(x+3)$

➔1+a=-6+1，a=-6

a×b=(-6)×1=-6。

(A)18. 設 a、b∈R，$|ax+1|\le b$ 的解是 $-1\le x\le 5$，則 a×b=?

(A) $-\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。

解析: b>0，$-b \le ax+1 \le b$，$-b-1 \le ax \le b-1$

若 a>0➔ $\dfrac{-b-1}{a} \le x \le \dfrac{b-1}{a}$ 且 $-1 \le x \le 5$ ➔ $\begin{cases} -b-1=a \\ b-1=5a \end{cases}$

➔ $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ ……(不合)

若 a<0➔ $\dfrac{-b-1}{a} \ge x \ge \dfrac{b-1}{a}$ 且 $5 \ge x \ge -1$ ➔ $\begin{cases} \dfrac{-b-1}{a}=5 \\ \dfrac{b-1}{a}=-1 \end{cases}$

➔ $\begin{cases} b-1=-a \\ -b-1=5a \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$a \times b = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{-3}{4}$

(B)19. 設 a、b 為整數，且 $(a-\sqrt{2})(1+b\sqrt{2})=-1+5\sqrt{2}$，則 $a \times b = ?$

(A)-6 (B)6 (C)-5 (D)5。

解析: $a+ab\sqrt{2}-\sqrt{2}-2b=-1+5\sqrt{2}$

$(a-2b)+(ab-1)\sqrt{2}=-1+5\sqrt{2}$

➔ $\begin{cases} a-2b=-1 \\ ab-1=5 \end{cases}$，令 a=2b-1 代入 (-1+2b)b-1=5，b=$-\dfrac{3}{2}$ $or 2$，取 b=2

a=2×2-1=3，故 a×b=2×3=6

(B)20. 設二次函數 $y=kx^2+6x-3$，若對所有實數 x，其所對應的 y 恆負，則 k 值的範圍為何? (A) k>-3 (B)k<-3 (C)k>-2 (D)k<-2

解析:

$f(x)=ax^2+bx+c$ 恆負➔ $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$

得知 k<0 且 $6^2+4\cdot k\cdot 3<0$

➔ k<-3

(D)21. Calculate the exact value of 42-2×(8-3)=?

翻譯:「42-2×(8-3)」計算出正確值?

(A)200 (B)100 (C)23 (D)32

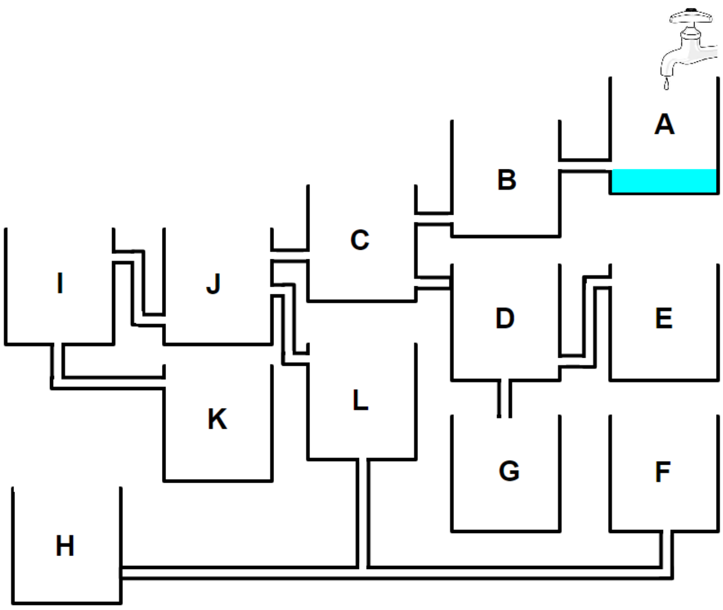
解析: 先乘除後加減，括號優先做，原式=42-2×5=42-10=32。

(A)22. Which tank will fill up first?

(A)F (B)G (C)K (D)H

翻譯:哪一個蓄水池最先被裝滿?

解析: D 和 H 都被擋，I 的連通管比 L 高，所以 L 會優先注水，L 最終流入 F，所以 F 會先滿水位。



(A)23. Figure out the following number laws:

翻譯:找出下列數字規律

14※2=21

20※4=75

36※9=320

40※10=?

(A)396 (B)386 (C)376 (D)366。

解析:

14※2=14×2-14÷2=28-7=21

20※4=20×4-20÷4=80-5=75

36※9=36×9-36÷9=320

40※10=40×10-40÷10=396

(D)24. 1 到 1000 之整數中，將 3 的倍數與 4 的倍數分別以○及Δ圈起來。

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 …………

像 3 4 與 8 9，這種○與Δ相鄰的組合有多少組?

(A)164 (B)165 (C)166 (D)167 組。

解析: 〔3,4〕=12，每 12 個數就會有 2 組

1000÷12=83……4

2×83+1=167 組，選 D。

(B)25. A、B、C、D、E 五人參加考試，滿分為 10 分，得分為整數。

A:「我 4 分而已。」

B:「我得最高分。」

C:「我是 A 和 D 的平均。」

D:「我是 5 個人的平均。」

E:「我是得分第二高，我比 C 多 2 分。」

請問 B 得幾分? (A)7 分 (B)8 分 (C)9 分 (D)10 分。

解析: 由 B、C、D、E 談話

(1) A=4，若 D<4，則 D 最低分(D 不可能是 5 個人的平均)

(2) A=4，若 D=A=4，則 C=$\frac{A+D}{2}$=4

又 E 比 C 多 2 分(即 E 得 6 分)，則 D 不可能是 5 個人的平均。

(3)根據(1)(2) D>A=4，5 人大小➔B>E>D>C>A

(4)A=4，C=$\frac{A+D}{2}=\frac{4+D}{2}$➔D 是偶數

①若 D=10➔不合(已知 B 最高)

②若 D=8➔ C=$\frac{A+D}{2}=\frac{4+8}{2}$=6，E 比 C 多 2 分，E=8

➔B=5×8-(8+8+6+4)=14...不合

③若 D=6➔ C=$\frac{A+D}{2}=\frac{4+6}{2}$=5，E=5+2=7

➔B=5×6-(7+6+5+4)=8...符合，選 B。

二、計算題(每題 25 分)

1. 多項式 f(x)除以 x-1、x-2、x-3 餘式分別是 1、3、7，求 f(x)除以(x-1)(x-2)(x-3)之餘數為何?

解析:

$$f(x)=(x-1)Q_1(x)+1$$
$$f(x)=(x-2)Q_2(x)+3$$
$$f(x)=(x-3)Q_3(x)+7$$

設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

則 $f(1)=a+b+c=1$，$f(2)=4a+2b+c=3$，$f(3)=9a+3b+c=7$

a=1，b=-1，c=1

餘式= x^2-x+1。

2. x 是實數，求 $f(x)=(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+1$之最小值為何?

解析:

(1) $f(x)=(x^2+4x)^2+7(x^2+4x)+10+2(x^2+4x)+1$ = $(x^2+4x)^2+9(x^2+4x)+11$

(2) 令 $t=(x^2+4x)$➔ $f(x)=t^2+9t+11$

(3) $\mathrm{t}=(x^2+4x)=(x+2)^2-4$， $\mathrm{t}\geq 4$

(4) $f(x)=t^2+9t+11=(t+\frac{9}{2})^2-\frac{37}{4}$

$t=-\frac{9}{2}$不在 $\mathrm{t}\geq -4$範圍內

故 t=-4，f(x)有最小值，$(-4)^2+9\times(-4)+11=-9$