



2017 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2017 International Mathematics Primary Contest (Taiwan)

高中二年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

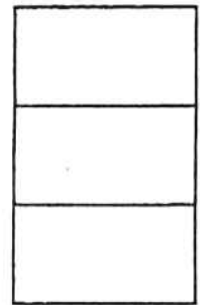
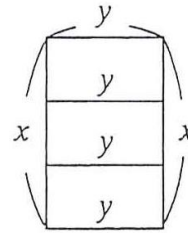
一、選擇題(每題 10 分)

(C)1. A "mesh" area of 8 square meters with a wire, as shown, how many meters of wire should he prepare at least? (excluding wire thickness)

翻譯: 用鐵絲圍成面積 8 平方公尺的「目」字形區域, 如圖所示, 則他至少要準備多少公尺的鐵絲? (鐵絲厚度不計) 本題送分(原試卷沒有選項)

(A)8 (B)12 (C)16 (D)20。

解析: 如圖所示設長為 x , 寬為 $y \rightarrow xy=8$



又鐵絲全長為 $2x+4y$ 由算幾不等式得 $2x+4y \geq 2\sqrt{2x \cdot 4y}$

$\rightarrow 2x+4y \geq 2\sqrt{8 \times 8} \rightarrow 2x+4y \geq 16$

即至少要準備 16 公尺的鐵絲。

(B)2. 某一個國家每年出生的人數與死亡人數分別為年初人口的 4.6%、2.2%，試問，至少幾年後人口會增為原來的 2 倍以上? ($\log 2 \approx 0.3010$)

(A)30 (B)31 (C)32 (D)33。

解析:

設原有人口數為 x , n 年後人口增為 $2x$

則 $x \left(1 + \frac{4.6}{100} - \frac{2.2}{100} \right)^n \geq 2x \rightarrow (1.024)^n \geq 2$

$n \log(1.024) \geq \log 2$, $n \geq \frac{\log 2}{\log 1.024} = \frac{0.3010}{10 \times 0.3010 - 3} = 30.1$, 至少 31 年。

(A)3. 無論 x 為任何實數，不等式 $ax^2 + 2ax + (3-a) > 0$ 恆成立，則實數 a 的範圍為

何? (A) $0 \leq a < \frac{3}{2}$ (B) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ (C) $a > \frac{3}{2}$ (D) $a > \frac{1}{2}$ 。

解析:

(1)若 $a=0$ ，一定成立。

(2)若 $a \neq 0$ ， $ax^2 + 2ax + (3-a) > 0$ ，恆成立

$$\rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (2a)^2 - 4 \cdot a(3-a) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 0 < a < \frac{3}{2} \end{cases}$$

由上得知 $0 < a < \frac{3}{2}$

(3)由(1)(2) $\rightarrow 0 \leq a < \frac{3}{2}$ 。

(A)4. 多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $x-3$ 餘式分別為 3、7、13，求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 之餘式為何?

(A) $x^2 + x + 1$ (B) $x^2 - x - 1$ (C) $2x + 1$ (D) $4x - 1$

解析:

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 3$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 7$$

$$f(x) = (x-3)Q_3(x) + 13$$

設 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + ax^2 + bx + c$

令 $f(1) = a + b + c = 3$ ， $f(2) = 4a + 2b + c = 7$ ， $f(3) = 9a + 3b + c = 13$

$\rightarrow a=1, b=1, c=1$ ，所求餘式為 $x^2 + x + 1$ 。

(B)5. 求 $\sqrt[3]{90}$ 化為小數後，小數點後第一位為?

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

解析:

$$\sqrt[3]{90} = x \rightarrow x^3 = 90$$

$$\text{令 } f(x) = x^3 - 90$$

則 $f(4.4) = -4.816 < 0$ ， $f(4.5) = 1.125 > 0$

$$\therefore 4.4 < x < 4.5$$

得所求為 4

(A)6. 下列哪一個數不能使 $(x+1)^{101}(x-2)^{102}(x-5)^{103} < 0$ 成立？

(A)-1.8 (B)-0.8 (C)1.8 (D)4.8

解析:

(1) $(x+1)^{101}(x-2)^{102}(x-5)^{103} < 0$

但 $(x+1)^{100} \geq 0$, $(x-2)^{102} \geq 0$, $(x-5)^{102} \geq 0$ 恆成立

(2) $(x+1)(x-5) < 0$ 且 $x \neq -1$ 、 2 、 5

→ $-1 < x < 5$ 且 $x \neq 2$, 故-1.8 不在範圍內, 選 A。

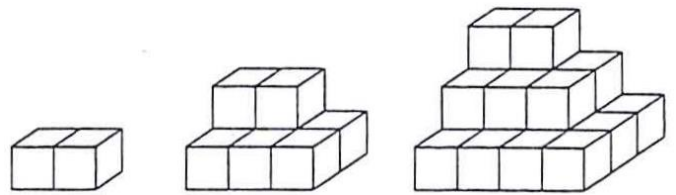
(B)7. 右圖的堆垛, 由許多相同的正立方體小木塊所構成, 由上層往下算起, 分別有 2 個、6 個、12 個小木塊.....以此類推, 可知 1 層的堆垛有 2 個, 2 層的堆垛有 8 個, 3 層的堆垛有 20 個, 則一個 n 層的堆垛共有多少個正立方體木塊?(請用 n 表示)

(A) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(B) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(C) n^3

(D) $n^3 + n^2 + n + 1$



解析: 公式 → $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

一個 n 層的堆垛的正立方體小木塊數為

$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(B)8. 以五種不同顏色塗在右圖各區域中, 但相鄰得異色, 則共多少種塗法?

(A)400 種 (B)420 種 (C)440 種 (D)460 種。

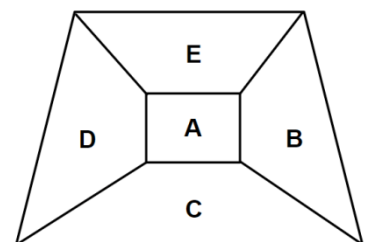
解析:

(1) B、D 同色時, $A \rightarrow BD \rightarrow C \rightarrow E$

$5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$

(1) B、D 異色時, $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$



共 $180+240=420$ 種。

(B)9. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人要選出 4 人參加世界圍棋比賽，則甲、乙、丙至少要選一人的選法共有多少種？

(A)32 (B)34 (C)36 (D)40 種。

解析：

甲、乙、丙三人至少選一人

$= (\text{任意選取的方法}) - (\text{甲、乙、丙三人都沒有入選})$

$$= C_4^7 - C_4^4 = 35 - 1 = 34 (\text{種})$$

↓ 選中丁、戊、己、庚

(D)10. 把 2 本不同的故事書，4 本不同的數學書及 1 本英文書排成一列，假設故事書必須排列在一起，數學書也必須排在一起，則這樣的排法共有多少種？

(A)120 (B)144 (C)280 (D)288 種。

解析：

$$3! \times 2! \times 4! = 6 \times 2 \times 24 = 288 \text{ 種。}$$

(C)11. 試計算 $(1.05)^{12}$ 的近似值至小數點後第一位(第二位四捨五入)之值為何？

(A)1.6 (B)1.7 (C)1.8 (D)1.9 。

解析：

$$(1.05)^{12} = (1 + 0.05)^{12} = C_0^{12} 1 + C_1^{12} 0.05 + C_2^{12} (0.05)^2 + C_3^{12} (0.05)^3 + \dots$$

$$= 1 + 0.6 + 0.165 + 0.0275 + \dots \approx 1.7925 \approx 1.8$$

(A)12. 設有 A、B 兩個瞭望台，兩台之間的距離為 $100\sqrt{6}$ 公尺，今發現海上有船 C，

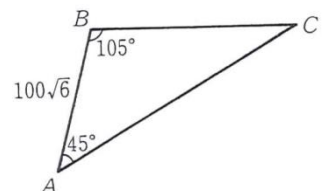
又設 $\angle ABC = 105^\circ$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，問船 C 與瞭望台 A 相距多遠？($\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ，

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4})$$

(A) $100(3 + \sqrt{3})$ (B) $50(3 + \sqrt{3})$ (C) $100(1 + \sqrt{6})$ (D) $50(1 + \sqrt{6})$ 公尺。

解析：

$$\angle BCA = 180^\circ - (105 + 45)^\circ = 30^\circ$$



由正弦定律知 $\frac{\overline{AC}}{\sin 105^\circ} = \frac{100\sqrt{6}}{\sin 30^\circ}$

→ $\overline{AC} = \frac{100\sqrt{6} \cdot \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{100\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = 100(3 + \sqrt{3})$ 公尺。

(B)13. 圖中每一小格皆為正方形，則 $\tan \theta = ?$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$ 。

解析:

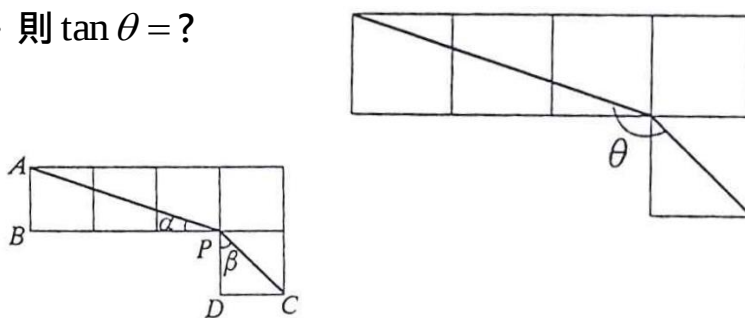
公式 → $\tan(90^\circ + \gamma) = -\frac{1}{\tan \gamma}$

令 $\angle APB = \alpha$, $\angle CPD = \beta$ (如右圖)

→ $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = 1$

∴ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3} \times 1} = 2$

∴ $\tan \theta = \tan(90^\circ + \alpha + \beta) = -\frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = -\frac{1}{2}$



(C)14. 計算 $(\sin 23^\circ + \sin 67^\circ)^2 + (\cos 23^\circ - \cos 67^\circ)^2 = ?$

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 。

解析:

原式 = $\sin^2 23^\circ + 2\sin 23^\circ \sin 67^\circ + \sin^2 67^\circ + \cos^2 23^\circ - 2\cos 23^\circ \cos 67^\circ + \cos^2 67^\circ$
 $= 1 + 1 = 2$ (∵ $\sin 23^\circ = \cos 67^\circ$, $\sin 67^\circ = \cos 23^\circ$)

(C)15. Peter had a chip card issued by the Post Office, a total of 8 digits, and one day when he went to the post Office ATM, he forgot the last digit of the password, so he decided to start from 0, 1, 2, 3 ... 9, first guess one. If you guessed wrong, the next time to guess the other numbers, but if even try three times are wrong, the ATM card will be automatically locked card, if each number is selected equal opportunity, what is the probability of his ATM card locked card? (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{9}{10}$ (C) $\frac{7}{10}$ (D) $\frac{729}{1000}$ 。 本題送分(原試卷多了 10)

翻譯: 彼得有一張郵局發行的晶片提款卡, 密碼共有 8 個數字, 有一天他到郵局自動櫃員機提款時, 竟然忘記密碼的最後一個數字, 於是他決定從 0、1、2、3...9 等十個數字中先隨邊猜一個, 如果猜錯, 下次再換猜其他數字, 但是若連試三次皆錯誤的話, 提款卡將會被自動鎖卡, 如果每個數字被選中的機會相等, 請問他的提款卡被鎖卡的機率是多少?

解析:

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} - \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{10} \text{ 。 另解 } \frac{P_3^9}{P_3^{10}} = \frac{9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{10} \text{ 。}$$

(C)16. 某人射擊, 平均 5 發 3 中, 今連續射擊 n 發, 若欲使 n 發中至少射中一發的機率大於 0.999, 則 n 的最小值為何? ($\log 2 = 0.3010$, $\log 5 = 0.699$)
(A)10 (B)9 (C)8 (D)7 。

解析:

(1) n 發都未命中 $(\frac{2}{5})^n$

$$(2) 1 - (\frac{2}{5})^n > 0.999 \rightarrow (\frac{2}{5})^n < 0.001 = \frac{1}{1000} \rightarrow (\frac{5}{2})^n > 1000$$

$$\rightarrow \log\left(\frac{5}{2}\right)^n > \log 1000 \rightarrow n(\log 5 - \log 2) > 3$$

$$\rightarrow n > \frac{3}{\log 5 - \log 2} = \frac{3}{0.699 - 0.301} = \frac{3}{0.398} \approx 7.5, \text{ 且故 } n \in N$$

$$\rightarrow n \geq 8, n \text{ 最小值是 } 8。$$

(B)17. 某次數學月考(最高 100、最低 0)，因為成績不理想，老師決定採

$$\begin{cases} A: y = 2x \\ B: y = \frac{4}{3}x + 20 \end{cases}, \text{ 兩種方式來調整，已知兩種調整後皆沒有人會超過 } 100 \text{ 分，且全班}$$

每個人以 A 方式調整後的分數皆不低於以 B 方式調整後的分數，求原始成績的全距最大值為多少分? (A)10 (B)20 (C)30 (D)40 分。

解析:

全距=數據資料中的「最大值-最小值」

令 x 表示原始成績， x 為變數

$$\text{由題意知 } \frac{4}{3}x + 20 \leq 2x \leq 100 \rightarrow 30 \leq x \leq 50, \text{ 故全距} = 50 - 30 = 20 \text{ 分}$$

(A)18. 如右圖，已知 $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 在以原點 O 為圓心的單位圓上，若以 $\overrightarrow{OP}$ 為終邊的標準位置角為 θ ，且 P 點沿著圓周逆時針方向旋轉 θ 到圓上另一點 Q ，求 Q 點坐標？

(A) $\left(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$ (B) $\left(-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}\right)$ (C) $\left(-\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ (D) $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ 本題送分(原試卷沒有圖形)

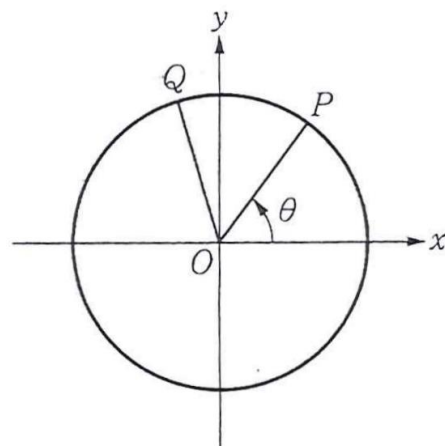
解析:

$$\text{因 } \cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{故 } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$Q \text{ 點坐標} = \left(-\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$$



(A) $6\sqrt{5}$ (B) $3\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$

$$\rightarrow x^2 = 7 + \sqrt{45} + 7 - \sqrt{45} + 2\sqrt{(7 + \sqrt{45})(7 - \sqrt{45})} = 14 - 2\sqrt{49 - 45} = 10$$

→ $x = \pm\sqrt{10}$ (取 $x = \sqrt{10}$)

(**D**)20. 設一等差數列前 n 項的和為 S_n ，若 $S_{10}=6$ ， $S_{20}=20$ ，則 $S_{30}=?$

(A)26 (B)32 (C)36 (D)42

解析:令 $S_{30}=x \rightarrow 6, 20-6, x-20$ 成等差

$$\rightarrow 2 \times 14 = 6 + x - 20$$

→ $x=42$, 即 $S_{30}=42$

(**D**)21. Calculate the exact value of $42-2\times(8-3)=?$

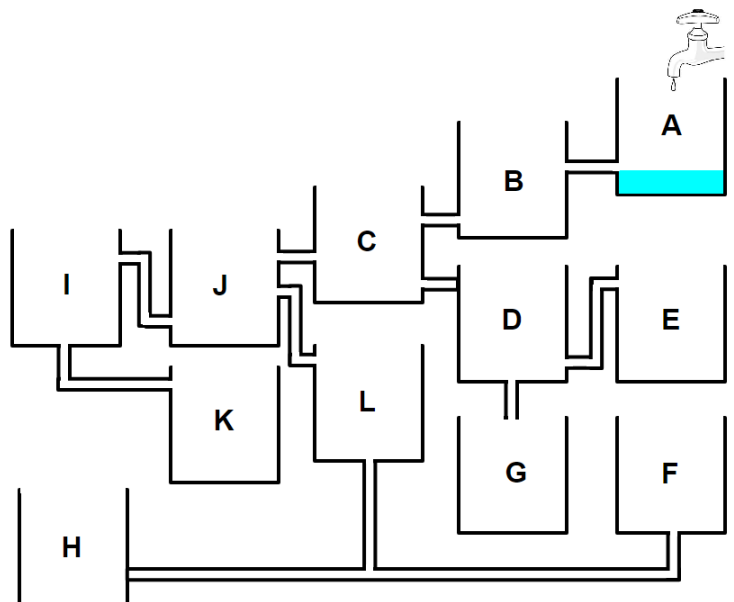
(A)200 (B)100 (C)23 (D)32

解析：先乘除後加減，括號優先做，原式 $=42-2\times 5=42-10=32$ 。

(**A**)22. Which tank will fill up first?

(A)F (B)G (C)K (D)H

解析: D 和 H 都被擋, I 的連通管比 L 高, 所以 L 會優先注水, L 最終流入 F, 所以 F 會先滿水位。



(**A**)23. Figure out the following number laws:

$$14 \times 2 = 21$$

$$20 \times 4 = 75$$

$$36 \times 9 = 320$$

$$40 \times 10 = ?$$

(A)396 (B)386 (C)376 (D)366。

解析:

$$14 \times 2 = 14 \times 2 - 14 \div 2 = 28 - 7 = 21$$

$$20 \times 4 = 20 \times 4 - 20 \div 4 = 80 - 5 = 75$$

$$36 \times 9 = 36 \times 9 - 36 \div 9 = 320$$

$$40 \times 10 = 40 \times 10 - 40 \div 10 = 396$$

(**D**)24. 1 到 1000 之整數中，將 3 的倍數與 4 的倍數分別以○及△圈起來。

1 2 ③ ④ 5 ⑥ 7 ⑧ ⑨ 10 11 ⑫ 13 14 ⑮ ⑯ 17 ⑰ 19 ⑳ ㉑ 22
23 ㉒ 25 26

像③ ④ 與⑧ ⑨，這種○與△相鄰的組合有多少組？

(A)164 (B)165 (C)166 (D)167 組。

解析: $\{3, 4\} = 12$ ，每 12 個數就會有 2 組

$$1000 \div 12 = 83 \dots 4$$

$$2 \times 83 + 1 = 167 \text{ 組，選 D。}$$

(**B**)25. A、B、C、D、E 五人參加考試，滿分為 10 分，得分為整數。

A: 「我 4 分而已。」

B: 「我得最高分。」

C: 「我是 A 和 D 的平均。」

D: 「我是 5 個人的平均。」

E: 「我是得分第二高，我比 C 多 2 分。」

請問 B 得幾分? (A)7 分 (B)8 分 (C)9 分 (D)10 分。

解析: 由 B、C、D、E 談話

(1) $A=4$ ，若 $D<4$ ，則 D 最低分(D 不可能是 5 個人的平均)

(2) $A=4$ ，若 $D=A=4$ ，則 $C = \frac{A+D}{2} = 4$

又 E 比 C 多 2 分(即 E 得 6 分)，則 D 不可能是 5 個人的平均。

(3)根據(1)(2) $D>A=4$ ，5 人大小 $\rightarrow B>E>D>C>A$

(4) $A=4$ ， $C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+D}{2} \rightarrow D$ 是偶數

①若 $D=10 \rightarrow$ 不合(已知 B 最高)

②若 $D=8 \rightarrow C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$ ，E 比 C 多 2 分， $E=8$

$\rightarrow B = 5 \times 8 - (8+8+6+4) = 14 \dots$ 不合

③若 $D=6 \rightarrow C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$ ， $E=5+2=7$

$\rightarrow B = 5 \times 6 - (7+6+5+4) = 8 \dots$ 符合，選 B。

二、計算題(每題 25 分)

1. 設 a 、 b 、 c 分別表 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對應邊

(1) 試證: $\frac{b+c}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A}$

(2) 試證: $\cos A + \cos B + \cos C > 1$

解析:

(1)

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = a \cos C + c \cos A \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

$$b+c = a \cos C + c \cos A + a \cos B + b \cos A$$

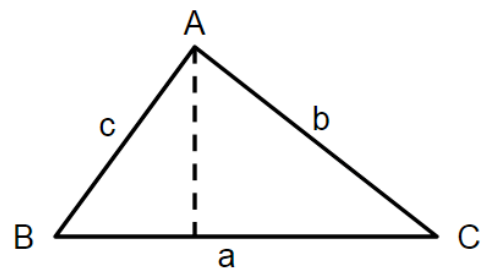
$$b+c = a(\cos B + \cos C) + \cos A(b+c)$$

$$(b+c) - \cos A(b+c) = a(\cos B + \cos C)$$

$$(b+c)(1 - \cos A) = a(\cos B + \cos C)$$

$$\rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A} \text{ 得證}$$

(2) $\frac{\cos B + \cos C}{1 - \cos A} = \frac{b+c}{a} > 1$ ，三角形兩邊之和大於第三邊， $b+c>a$



$$\cos B + \cos C > 1 - \cos A$$

→ $\cos B + \cos C + \cos A > 1$ 得證。

2. Known as the A brand of the pen pen more than the B brand of the pen expensive 2 dollars, brother had to change 120 dollars, all used to buy B brand of the pen, but because A brand of atomic pen more durable, so he decided to borrow from my mother 40 dollars, plus their own pocket money, all used to buy A brand pen, and can be bought than the original B brand more, ask B brand how many dollars each one?

翻譯: 已知 A 牌的原子筆比 B 牌的原子筆貴 2 元, 哥哥本來用零錢 120 元, 全部用來購買 B 牌的原子筆, 但由於 A 牌的原子筆比較耐用, 所以他決定向媽媽借 40 元, 加上自己的零用錢, 全部用來購買 A 牌原子筆, 而且可以比原先要買的 B 牌多一枝, 求 B 牌每枝多少元?

解析:

令 B 牌每枝 x 元, A 牌每枝 $x+2$ 元

最後買 A 牌 $\frac{160}{x+2}$, 原買 B 牌 $\frac{120}{x}$

$$\frac{160}{x+2} = \frac{120}{x} + 1$$

$$160x = 120(x+2) + x(x+2)$$

$$x = 8 \text{ 或 } 30$$

答: 8 或 30 元。