



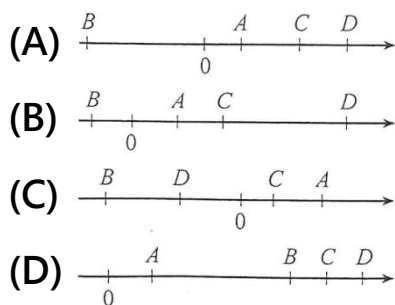
2017 **IMC** 國際數學競賽 台灣區初賽
2017 International Mathematics Contest (Taiwan)

國中二年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 10 分)

(**A**)1. 數線上 A(a)、B(b)、C(c)、D(d) 且 $|a-b| > |c-d|$ ， $ab < 0$ ， $cd > 0$ ，則下列哪一個可能是 A、B、C、D 在數線上的位置？



解析: $ab < 0 \Rightarrow a、b$ 異號即一正一負； $cd > 0 \Rightarrow c、d$ 同號， $|a-b| = \overline{AB}$ ， $|c-d| = \overline{CD}$ ， $|a-b| > |c-d| \Rightarrow \overline{AB} > \overline{CD}$ ，選 A。

(**D**)2. 已知 $11 \times 13 \times 15 \times 17 = 36465$ ，計算 $2^6 \times 11 \times 15 \times 17 - 11 \times 12 \times 15 \times 17 = ?$
(A)36465 (B)72930 (C)109295 (D)145860。

解析: 原式 $= (2^6 - 12) \times 11 \times 15 \times 17 = 52 \times 11 \times 15 \times 17$
 $= 4 \times 13 \times 11 \times 15 \times 17 = 145860$ 。

(**D**)3. 某自助餐採買餐具一批，已知免洗碗每包有 45 個，衛生筷每包有 80 雙，紙杯每條有 60 個，若每套餐具包括免洗碗、衛生筷、紙杯各一份，則下列何者錯誤？(A)免洗碗最少買 16 包(B)衛生筷最少買 9 包(C)紙杯最少買 12 條(D)最少買 700 套。

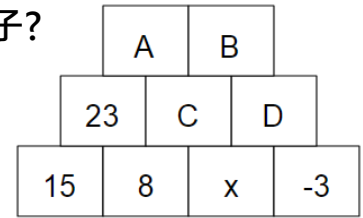
解析: $\{45, 80, 60\} = 720(\text{套})$

免洗碗 $720 \div 45 = 16(\text{包})$ ；衛生筷 $720 \div 80 = 9(\text{包})$ ；紙杯 $720 \div 60 = 12(\text{條})$ ，選 D。

(**D**)4. 如右圖，從底層開始相鄰兩數的和填入上方中間空格。例如： $15+8=23$ 。則

「 $A+B+C+D$ 」的結果可以用 x 表示成下列哪一個式子？

(A) $7x-3$ (B) $2x+5$ (C) $9x-13$ (D) $5x+41$



解析：

$$C=8+x, D=x-3, A=23+8+x=31+x, B=8+x+x-3=2x+5$$

$$A+B+C+D=31+x+2x+5+8+x+x-3=5x+41。$$

(**C**)5. 小明攔了一台計程車，欲追趕已出發的遊覽車，司機告訴小明：「若以時速 80 公里追，需要 1 個半小時才能追上；若以時速 90 公里追，只需要 40 分鐘就追上。」設遊覽車時速固定，則此司機估計遊覽車的時速為多少公里？

(A)64 公里 (B)70 公里 (C)72 公里 (D)76 公里。

解析：設遊覽車時速為 Y 公里， $80 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{2}Y = 90 \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3}Y$ ， $Y=72$ 。

(**B**)6. 農曆春節前，爸爸到銀行兌換 500 元與 1000 元新鈔，共兌換 10000 元，若兩種面額都有兌換，則共有幾種換鈔方式？

(A)12 種 (B)9 種 (C)10 種 (D)8 種。

解析：設 500 元鈔票可兌換 X 張，1000 元鈔票可兌換 Y 張

$$500X+1000Y=10000$$

$$X+2Y=20, \text{ 共 9 種。}$$

X	18	16	14	12	10	8	6	4	2
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9

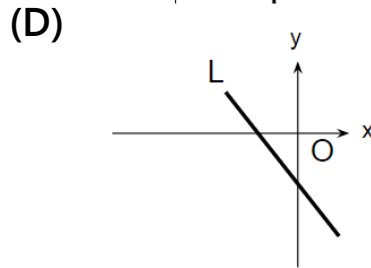
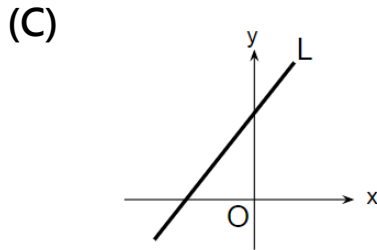
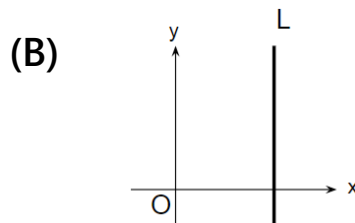
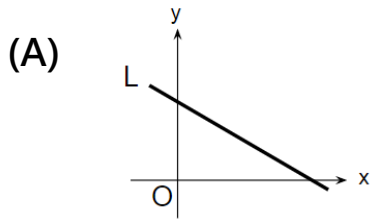
(**B**)7. 美華從家裡出發，步行一段路，然後轉搭公車到學校門口，其路程為 7 公里。某日一大早她 6 點 50 分出門步行到站牌，剛好有公車靠站，當車子到達學校門口時，已經是 7 點 11 分。已知，她步行平均時速為 5 公里，而公車平均時速為 40 公里，則她每天要從家裡步行多少分鐘去搭公車？

(A)6 分鐘 (B)12 分鐘 (C)9 分鐘 (D)21 分鐘。

解析：假設步行 X 分，坐公車 Y 分

$$\begin{cases} X+Y=21 \\ 5 \times \frac{X}{60} + 40 \times \frac{Y}{60} = 7 \end{cases}, \text{ 則 } X=12, Y=9。$$

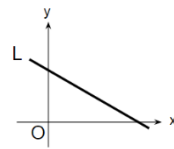
(**A**)8. 已知 $ab > 0$ ，下列何項可能是直線 $L: ax + y = b$ 的圖形？



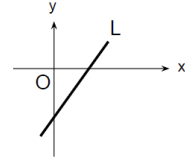
解析: $ax + y = b$

x	0	$\frac{b}{a}$
y	b	0

又 $ab > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$ 圖形可能為



或



(**D**)9. 若三條直線 $y = 3x - 5$ 、 $y = -3x + 1$ 與 $y = mx + 3$ 無法圍成一個三角形，則 m 值不可能為下列哪一個數？(A)-3 (B)3 (C)-5 (D)5。

解析: 有三種情形

① $y = mx + 3$ 與 $y = -3x - 5$ 平行 $\Rightarrow m = -3$ ，② $y = mx + 3$ 與 $y = -3x + 1$ 平行 $\Rightarrow m = -3$

③ 三條直線交於一點 $\Rightarrow m = -5$

(**A**)10. 甲、乙兩個相同大小的瓶子中各有一些水，甲瓶有 a 毫升的水，乙瓶有 b 毫升的水，阿泰將甲瓶中的一半倒入乙瓶，沒有溢出，此時甲、乙兩瓶的水量比例為 2:3，若阿泰再將乙瓶中 100 毫升倒入甲瓶，則兩個瓶中的水量是一樣的，求 $a + b = ?$ (A)1000 (B)800 (C)400 (D)200。

解析: $\frac{a}{2} : (b + \frac{1}{2}a) = 2:3 \Rightarrow \frac{3a}{2} = 2b + a \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2b$

$a = 4b$ ，又 $\frac{1}{2}a + 100 = b + \frac{1}{2}a - 100$ ， $b = 200$ ， $a = 800$ ，故 $a + b = 1000$ 。

(A)11. 長 26 公分的彈簧，掛著一個重量為 x 公克的砝碼後，彈簧長度為 y 公分，

彈簧的伸長量為 z 公分。右表為 x 、 y 、 z 的關係，則下列敘述何者正確？

(A)只有 x 與 z 成正比

(B)只有 y 與 x 成正比

(C) x 與 y 成正比， y 與 z 也成正比

(D) x 、 y 、 z 三數間沒有正比關係

X(公克)	0	5	10	15	20	25
y(公分)	26	28	30	32	34	36
z(公分)	0	2	4	6	8	10

解析: $\frac{x}{z} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = \frac{25}{10}$ ，即 $x = \frac{5}{2}z$ 。

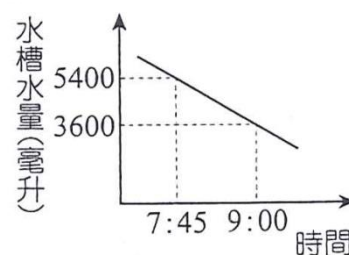
(C)12. 一水槽底部有一裂縫，水槽內的水不斷滲出，而水槽內的水量與時間的關係如右圖，利用圖中所提供的數據，試推估水槽在 11:30 的情形為下列何者？

(A)水槽內還有水，約 25 毫升。

(B)再過 5 分鐘水會漏完。

(C)水槽內的水剛好漏完。

(D)水槽內的水在 5 分鐘前已漏完。



解析: 設水槽水量為 y ，時間為 x 時，則 $y=ax+b$

$$\begin{cases} 5400 = 7.75a + b \\ 3600 = 9a + b \end{cases} \rightarrow a = -1440, b = 16560, y = -1440x + 16560$$

$y=0 \rightarrow x=11.5=11$ 時 30 分，表示水剛好漏完。

(C)13. 在容量為 750c.c.的杯子中，已裝有 $\frac{3}{5}$ 的水。先將 10 顆相同的玻璃珠放入

水中，結果水沒有滿；再將 2 顆相同的玻璃珠放入水中，結果水滿溢出。由此

可推測出一顆玻璃珠的體積在下列哪一個範圍內?(1c.c.=1cm³)

(A)15 cm³ 以上，20 cm³ 以下 (B) 20 cm³ 以上，25 cm³ 以下

(C)25 cm³ 以上，30 cm³ 以下 (D)30 cm³ 以上，35 cm³ 以下

解析：設一顆玻璃珠的體積為 $x \text{ cm}^3$

$$\begin{cases} 750 \times \frac{3}{5} + 10x < 750 \\ 750 \times \frac{3}{5} + 12x \geq 750 \end{cases} \quad , \text{得到 } 25 \leq x < 30 , \text{選 C}。$$

(C)14. 計算 $265 \times 263 + 266 \times 266 - 266 \times 264 - 264 \times 264$ 之值為何？

(A)0 (B)1 (C)531 (D)533 。

解析：原式 $= (264+1)(264-1) + 266 \times (266-264) - 264^2$

$$= (264^2 - 1^2) + 266 \times 2 - 264^2 = 531。$$

(C)15. 甲、乙、丙三人計算 $(-2x^2 - 3x + 4) - (ax^2 + bx + c)$ ，甲得結果 $5x^2 + x$ ，乙得結

果 $x^2 - 5x + 3$ ，丙得結果 $5x - 3$ ，老師說甲只做對 x^2 項，乙只做對常數項，丙只

做對 x 項，則 $a+b+c=?$ (A)-10 (B)-12 (C)-14 (D)-16 。

解析：甲： $-2-a=5$ ， $a=-7$ ，乙： $4-c=3$ ， $c=1$ ，丙： $-3-b=5$ ， $b=-8$

則 $a+b+c = -7-8+1 = -14$ 。

(A)16. 如右圖，正方形 ABCD 與正方形 APQR 的邊長分別是 $(3x+2)$ 公分與 $(4x-6)$

公分，若這兩個正方形重疊在 A 點，D 點在 $\overline{PQ}$ 上，且 $\overline{DQ} = (x-4)$ 公分，則鋪色

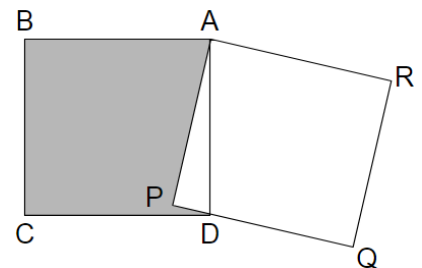
面積為多少平方公分？

(A) $3x^2 + 25x - 2$

(B) $3x^2 - x + 10$

(C) $-3x^2 + 38x - 8$

(D) $-3x^2 - 14x + 16$



解析:

$$\overline{PD} = (4x-6) - (x-4) = 3x-2, \text{ 所求} = (3x+2)^2 - \frac{1}{2}(4x-6)(3x-2) = 3x^2 + 25x - 2 (\text{平方公分})$$

(A) 17. 若 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，則 $x^3 + 2x^2 - 13x + 3$ 的值為何?

(A)-7 (B)7 (C)5 (D)13。 本題選 A 或 B 才給分(原試卷選項重複)

解析: $\because (x^3 + 2x^2 - 13x + 3) \div (x^2 - 3x + 2) = x + 5 \dots -7$

$\therefore$ 原式 $= (x^2 - 3x + 2)(x + 5) - 7 = 0 - 7 = -7$ 。

(B) 18. (甲)-8 是 64 的平方根 (乙)-12 是 -144 的平方根 (丙)0.3 是 0.9 的平方根

(丁) $-\frac{4}{5}$ 是 $\frac{16}{25}$ 的平方根，以上四個敘述，正確的有幾項?

(A)1 項 (B)2 項 (C)3 項 (D)4 項。

解析: (甲) $(-8)^2 = 64 \rightarrow -8$ 是 64 的平方根; (乙) $(-12)^2$ 是 144, -12 不是 -144 的平方根

(丙) 0.3^2 是 0.09, 0.3 不是 0.9 的平方根 (丁) $(-\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25} \rightarrow -\frac{4}{5}$ 是 $\frac{16}{25}$ 的平方根，選 B。

(A) 19. 設 a, b, c, d 為正整數，若 $\sqrt{480} \approx 21.9$ ，欲從 $\sqrt{480a}, \sqrt{\frac{480}{b}}, \sqrt{480+c},$

$\sqrt{480-d}$ 均為正整數，當 a, b, c, d 均為最小值時， $a+b+c+d=?$

(A)103 (B)104 (C)105 (D)106。

解析: $480 = 2^5 \times 3 \times 5$

$\rightarrow a = 2 \times 3 \times 5 = 30, b = 2 \times 3 \times 5 = 30, 21^2 = 441, d = 480 - 441 = 39, 22^2 = 484,$
 $c = 484 - 480 = 4$ ，則 $a+b+c+d = 30+30+4+39 = 103$ 。

(D) 20. 比較 $a = \sqrt{2} - \sqrt{8}, b = \sqrt{3} - \sqrt{7}, c = \sqrt{4} - \sqrt{6}$ ，三者的大小關係為何?

(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$ 。

解析:

$$a^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{8})^2 = 2 - 2\sqrt{16} + 8 = 10 - 2\sqrt{16}$$

$$b^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{7})^2 = 3 - 2\sqrt{21} + 7 = 10 - 2\sqrt{21}$$

$$c^2 = (\sqrt{4} - \sqrt{6})^2 = 4 - 2\sqrt{24} + 6 = 10 - 2\sqrt{24}$$

$$a < 0, b < 0, c < 0 \text{ 且 } c^2 < b^2 < a^2$$

$$\rightarrow a < b < c$$

(**D**)21. Calculate the exact value of $42-2\times(8-3)=?$

翻譯:「 $42-2\times(8-3)$ 」計算出正確值?

(A)200 (B)100 (C)23 (D)32

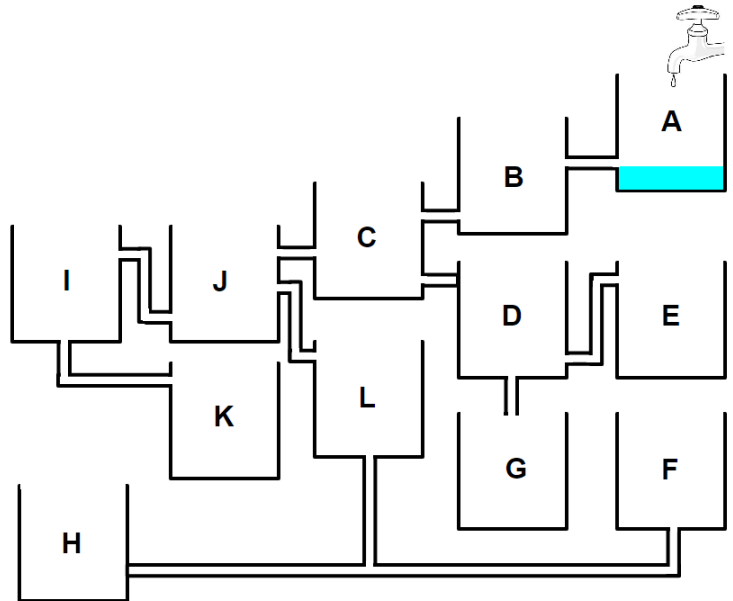
解析: 先乘除後加減, 括號優先做, 原式= $42-2\times 5=42-10=32$ 。

(**A**)22. Which tank will fill up first?

翻譯:哪一個蓄水池最先被裝滿?

(A)F (B)G (C)K (D)H

解析: D 和 H 都被擋, I 的連通管比 L 高, 所以 L 會優先注水, L 最終流入 F, 所以 F 會先滿水位。



(**A**)23. Figure out the following number laws:

$$14\times 2=21$$

$$20\times 4=75$$

$$36\times 9=320$$

$$40\times 10=?$$

(A)396 (B)386 (C)376 (D)366。

翻譯:找出下列數字規律:

解析:

$$14\times 2=14\times 2-14\div 2=28-7=21$$

$$20\times 4=20\times 4-20\div 4=80-5=75$$

$$36\times 9=36\times 9-36\div 9=320$$

$$40\times 10=40\times 10-40\div 10=396$$

(**D**)24. 1 到 1000 之整數中，將 3 的倍數與 4 的倍數分別以○及△圈起來。

像 3 4 與 8 9，這種○與△相鄰的組合有多少組？

(A)164 (B)165 (C)166 (D)167 組。

解析: $\{3, 4\} = 12$ ，每 12 個數就會有 2 組

$$1000 \div 12 = 83 \dots 4$$

$$2 \times 83 + 1 = 167 \text{ 組，選 D。}$$

(**B**)25. A、B、C、D、E 五人參加考試，滿分為 10 分，得分為整數。

A:「我 4 分而已。」

B:「我得最高分。」

C:「我是 A 和 D 的平均。」

D:「我是 5 個人的平均。」

E:「我是得分第二高，我比 C 多 2 分。」

請問 B 得幾分? (A)7 分 (B)8 分 (C)9 分 (D)10 分。

解析: 由 B、C、D、E 談話

(1) $A=4$ ，若 $D < 4$ ，則 D 最低分(D 不可能是 5 個人的平均)

$$(2) A=4, \text{ 若 } D=A=4, \text{ 則 } C = \frac{A+D}{2} = 4$$

又 E 比 C 多 2 分(即 E 得 6 分)，則 D 不可能是 5 個人的平均。

(3)根據(1)(2) $D > A=4$ ，5 人大小 $\rightarrow B > E > D > C > A$

$$(4) A=4, C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+D}{2} \rightarrow D \text{ 是偶數}$$

①若 $D=10 \rightarrow$ 不合(已知 B 最高)

$$\textcircled{2} \text{ 若 } D=8 \rightarrow C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+8}{2} = 6, \text{ E 比 C 多 2 分, } E=8$$

$$\rightarrow B = 5 \times 8 - (8 + 8 + 6 + 4) = 14 \dots \text{不合}$$

$$\textcircled{3} \text{ 若 } D=6 \rightarrow C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+6}{2} = 5, E = 5 + 2 = 7$$

$$\rightarrow B = 5 \times 6 - (7 + 6 + 5 + 4) = 8 \dots \text{符合，選 B。}$$

二、計算題(每題 25 分)

1. Linear L: $3x+4y=12$ graph x axis at a point, alternating y axis at point B,

(1) The area of the $\triangle AOB$ is _____. (15 分)

(2) If P (2, K) in the first quadrant, and quadrilateral PAOB area of 3 times the area, the value of k? (10 分)

翻譯: 直線 L: $3x+4y=12$ 的圖形交 x 軸於 A 點, 交 y 軸於 B 點,

(1) 求 $\triangle AOB$ 的面積? (15 分)

(2) 若 P(2, k) 在第一象限, 且四邊形 PAOB 的面積為 $\triangle AOB$ 面積的 3 倍, 求 k 之值?(10 分)

解析:

(1) $3x+4y=12$,

x	4	0
y	0	3

A(4,0), B(0,3), $\triangle AOB$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ (平方單位)

(2) 四邊形 PAOB 面積 = $6 \times 3 = 18$, 即四邊形 PQOB + $\triangle APQ = 18$

$$\frac{1}{2} (3+k) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times k = 18$$

$$k = \frac{15}{2}$$

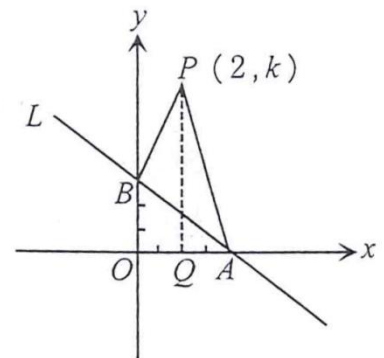
答: (1) $\triangle AOB$ 的面積 = 6 平方公分 (2) $k = \frac{15}{2}$ 。

2. 阿忠無意中發現, 今年他兩個未滿 20 歲的兒子年齡的平方差是 99, 他的弟弟阿華兩個未滿 15 歲的女兒, 年齡的平方差剛好也是 99, 試問阿忠的長子和阿華的次女年齡相差幾歲?

設 $a^2 - b^2 = 99$, 且 $a > b > 0$, 則 $(a+b)(a-b) = 99 = 1 \times 99 = 3 \times 33 = 9 \times 11$

$$\begin{cases} a+b=99 \\ a-b=1 \end{cases}, (a, b) = (50, 49) \dots \text{不合}$$

$$\begin{cases} a+b=33 \\ a-b=3 \end{cases}, (a, b) = (18, 15) \dots \text{阿忠的長子 18 歲}$$



$$\begin{cases} a+b=11 \\ a-b=9 \end{cases} \cdot (a, b)=(10,1).....\text{阿華的次女 1 歲}$$

兩人相差= $18-1=17$ 歲，

$$\begin{cases} a+b=11 \\ a-b=9 \end{cases} \cdot (a, b)=(10,1)..... \text{阿忠的長子 10 歲，阿華的次女 1 歲}$$

兩人相差= $10-1=9$

答:17 歲或 9 歲。