



2017 IMC 國際數學競賽 台灣區初賽

2017 International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 10 分)

(**B**)1. 計算 $\frac{2009^3 + 3 \times 2009^2 + 4018}{2009^2 + 2009} = ?$

(A)2009 (B)2011 (C)2012 (D)2013。

解析: 設 $x=2009$ ，原式 $= \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + x} = \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x(x+1)} = x+2 = 2009+2=2011$ 。

(**B**)2. 參考右表，假設 N 為整數，且 $N < \sqrt{330} + \sqrt{3.4} < N+1$ ，則 N 之值為何？

(A)19 (B)20 (C)21 (D)22。

解析:

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
33	1089	5.745	18.166
34	1156	5.831	18.439

$$\sqrt{330} = 18.166, \sqrt{3.4} = \sqrt{\frac{340}{100}} = \frac{18.439}{10} = 1.8439$$

$$\sqrt{330} + \sqrt{3.4} = 18.166 + 1.8439 = 20.0099$$

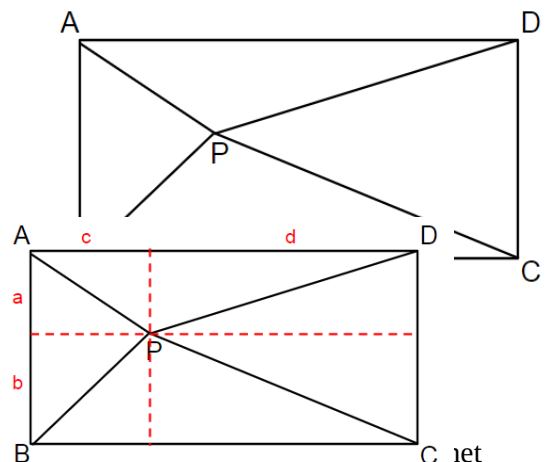
$$20 < 20.0099 < 21, N=20。$$

(**D**)3. 如右圖， P 為矩形 $ABCD$ 內一點，若 $\overline{AP} = 3$ ， $\overline{BP} = 6$ ， $\overline{CP} = 11$ ，則 $\overline{DP}$ 之值為何？(A) $\sqrt{79}$ (B) $\sqrt{82}$ (C) $\sqrt{91}$ (D) $\sqrt{94}$ 。

解析:

過 P 點做二條直線平行 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$

$$a^2 + c^2 = 9 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$



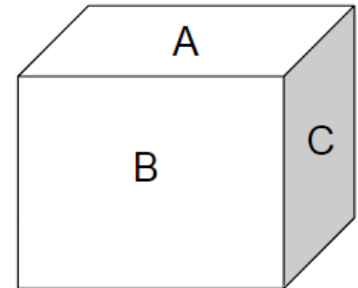
$$b^2+c^2=36\cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$b^2+d^2=121\cdots\cdots\textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{3}-\textcircled{2}\rightarrow a^2+d^2=\overline{DP}^2=94, \overline{DP}=\sqrt{94}, \text{選 D}。$$

(**A**)4. 如圖·A·B·C 是長方體相鄰的三個面，若其面積分別為 x^2+x-6 、 $2x^2+x-15$ 、 $2x^2-9x+10$ ，則長方體的體積以 x 的多項式表示， x^2 項的係數為何？

(A)-3 (B)-4 (C)-5 (D)-6。



$$\text{解析: } A=(x+3)(x-2)$$

$$B=(x+3)(2x-5)$$

$$C=(2x-5)(x-2)$$

$$\text{體積}=(x+3)(x-2)(2x-5)=2x^3-3x^2-17x+30$$

(**B**)5. 漂亮寶貝服飾店一件售價 200 元的休閒服，通常一天可賣 500 件，若將每件的售價加 1 元，則一天會少賣 2 件，若要達到總收入不變，則每件休閒服應加價多少元賣出？

(A)40 (B)50 (C)60 (D)70。

解析: 設加價 x 元，

$$(200+x)(500-2x)=500\times 200$$

$$10000+100x-2x^2=10000$$

$$2x^2-100x=0, x(x-50)=0, x=50 \text{ 或 } 0(\text{不合})$$

(**C**)6. 有一個老時鐘，已知一點鐘敲一下，二點鐘敲二下，……，若五點整時，第一聲鐘響起到最後一聲鐘響起共計花了 6 秒，那麼某次鐘響費時 15 秒是幾點？

(A)9 (B)10 (C)11 (D)12。

解析: 五點鐘時，時鐘響了五下，所以兩聲鐘響之間的時間為 $\frac{6}{4}=1.5$ 秒

$$15\div 1.5=10, 10+1=11, \text{故 11 點，選 C}。$$

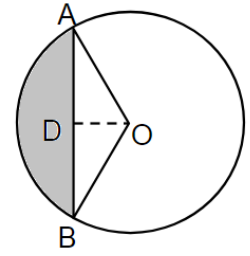
(**B**)7. 等差數列的首項 123，第五項為 103，和為 1510，則此等差數列共有多少項? (A)18 (B)20 (C)22 (D)24

$$\text{解析: } 103=123+4\times d, d=-5$$

$$\frac{n[246+(n-1)\times(-5)]}{2}=1510, (n-20)(5n-151)=0, n=20 \text{ 或 } \frac{151}{5} \text{ (不合)}。$$

(**D**)8. 如右圖，圓 O 的半徑為 3，扇形 OAB 的面積為 3π ，那麼弓形面積(即陰影面積)是多少？

- (A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $3\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}$ (C) $3\pi - \frac{3}{2}$ (D) $3\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}$



解析:

$$\angle AOB = \frac{3\pi}{3^2\pi} \times 360^\circ = 120^\circ, \text{ 又 } \overline{AO} = 3$$

$$\angle DOA = 120^\circ \div 2 = 60^\circ, \overline{OD} \perp \overline{AB}$$

$$\overline{AD} = \frac{3}{2}\sqrt{3} = \overline{BD}, \overline{OD} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \Delta ABO = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

$$\text{陰影部分} = 3\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

(**C**)9. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ， $\overline{ED} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{FG}$ ，則

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = ?$$

- (A)375 (B)405 (C)435 (D)465 度。

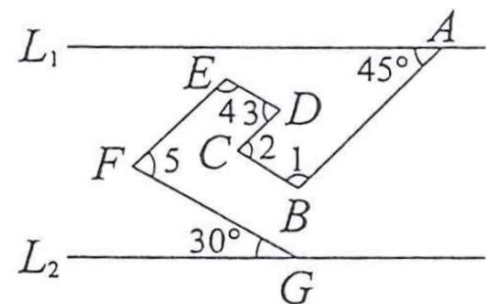
解析:

延長 $\overline{EF}$ 交 L_1 於 H，且所成的角為 $\angle 6$

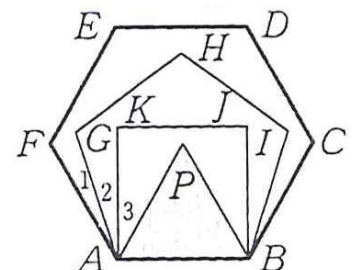
， $\angle 6 = 45^\circ$ (同位角) $\rightarrow$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 6 + 30^\circ)$$

$$= 180^\circ + 180^\circ + 45^\circ + 30^\circ = 435^\circ$$



(**C**)10. 如右圖 ABCDEF 為正六邊形，ABIHG 為正五邊形，ABJK 為正方形， ΔABP 為正三角形，求 $\angle 1 - \angle 2 + \angle 3 = ?$



(A)36 (B)30 (C)24 (D)18 度。

解析: $\angle 3 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\angle 2 = \frac{180^\circ \times 3}{5} - 90^\circ = 18^\circ$$

$$\angle 1 = \frac{180^\circ \times 4}{6} - 108^\circ = 12^\circ$$

所求 = $12 - 18 + 30 = 24$ 度。

(**A**)11. 如右圖，四邊形 ABCD 中， $\overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\angle BDC = \angle A = 90^\circ$ ， $\overline{BD} = 12$ ， $\overline{CD} = 5$ ，那麼 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 大小關係為何？

(A) $\angle 3 > \angle 1 > \angle 2$

(B) $\angle 1 > \angle 2 > \angle 3$

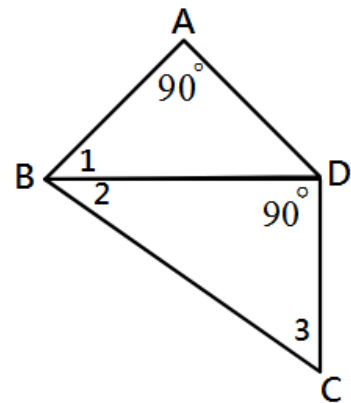
(C) $\angle 2 > \angle 3 > \angle 1$

(D) $\angle 3 > \angle 2 > \angle 1$

解析: $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\angle 1 = (180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 45^\circ$

$\overline{BD} > \overline{CD}$ ， $\angle 3 > \angle 2$ 又 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$\angle 3 > 45^\circ$ ， $\angle 2 < 45^\circ$



(**C**)12. 如圖，正方形 ABCD 中，E、F、G、H 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 上的點， $\overline{EG}$ 、 $\overline{FH}$ 將正方形 ABCD 分成甲、乙、丙三個區域，若 $\overline{EF} = \overline{DF}$ ，且矩形甲的周長為 40，矩形丙的周長為 28，那麼矩形乙的面積為多少？

(A)18 (B)20 (C)24 (D)28 平方單位。

解析:

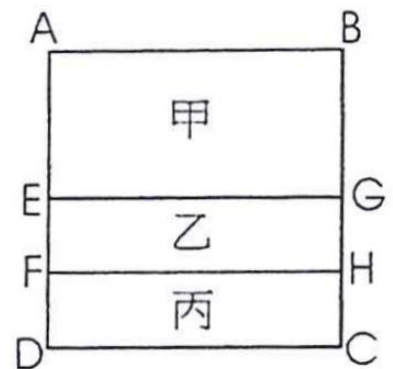
設 $\overline{AB} = x$ ， $\overline{BG} = 20 - x$ ， $\overline{GH} = \overline{CH} = 14 - x$

$\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $x = 20 - x + 14 - x + 14 - x$

$4x = 48$ ， $x = 12$

$\overline{GH} = \overline{CH} = 14 - 12 = 2$

乙面積 = $12 \times 2 = 24$



(**C**)13. 如右圖，已知 ABCD 為一梯形， $\overline{AD} = x$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{DE} = h$ ，其中 x 為正奇數， h 為正整數，若梯形 ABCD 的面積為 18，則 $x + h = ?$

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8 。

解析:

$$\frac{(x+6)h}{2} = 18$$

$$\rightarrow (x+6)h = 36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$$

x 為正奇數， h 為正整數， $x=3$ ， $h=4$

$$x+h=3+4=7$$

(**D**)14. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上，且四邊形 $ADEF$ 為菱形，若 $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{AD} = 5$ ，則 $\overline{AC} = ?$

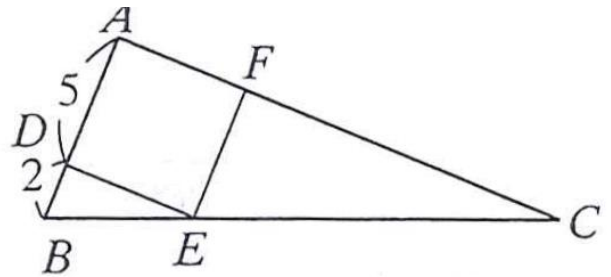
(A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{25}{2}$ (C) $\frac{27}{2}$ (D) $\frac{35}{2}$ 。

解析:

$$\overline{BE} : \overline{EC} = \overline{BD} : \overline{DA} = 2 : 5 ,$$

$$\overline{AF} : \overline{FC} = \overline{BE} : \overline{EC} = 2 : 5 ,$$

$$5 : \overline{FC} = 2 : 5 , \overline{FC} = \frac{25}{2} , \overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = \frac{35}{2}$$



(**B**)15. 右圖是用 24 張大小相同的正方形紙片拼成的長方形，阿虎想拿出相同大小的正方形紙片拼出面積比這個長方形大的相似長方形，則最少須用幾張正方形紙片？

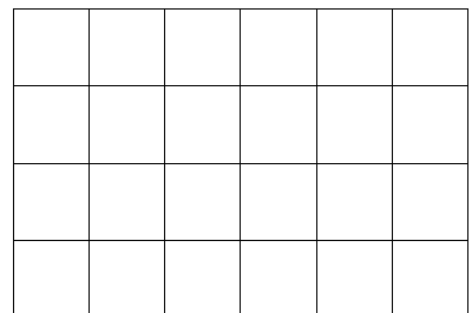
(A)48 張 (B)54 張 (C)72 張 (D)96 張

解析:

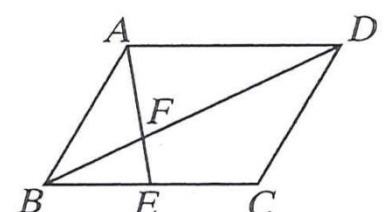
$$\text{長:寬} = 6:4 = 3:2$$

$$\text{擴大 3 倍} , 3 \times 3 = 9 , 2 \times 3 = 6$$

$$9 \times 6 = 54 \text{ 張}$$



(**B**)16. 如右圖， $ABCD$ 為平行四邊形， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，已知 E 為 $\overline{BC}$ 之中點， $\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 F ， $\triangle ABF$ 面積:四邊形 $CEFD$ 面積=?



(A)1:4 (B)2:5 (C)3:7 (D)4:7

解析:

$$\textcircled{1} \triangle AFD \sim \triangle EFB, \overline{AF}:\overline{EF} = \overline{AD}:\overline{BE} = \overline{DF}:\overline{FB} = 2:1$$

$$\textcircled{2} \triangle ABF = \frac{2}{3} \triangle ABE \text{ 面積} = \frac{1}{3} \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{6} \text{ 平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}$$

$$\triangle BEF = \frac{1}{12} \text{ 平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}$$

$$CEFD \text{ 面積} = \frac{5}{12} \text{ 平行四邊形 } ABCD \text{ 面積}, \frac{1}{6}:\frac{5}{12} = 2:5。$$

(C)17. 如右圖，由光源 O 發出光線，將 $\triangle ABC$ 映至 $\triangle A'B'C'$ ， $\overline{OA}:\overline{OA'} = 2:5$
 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA} = 4:3:2$ ，若 $\overline{AB} = 16$ 公分，則 $\triangle A'B'C'$ 之周長是多少公分？

(A)70 (B)80 (C)90 (D)100

解析:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \rightarrow \overline{OA'}:\overline{OA} = \overline{A'B'}:\overline{AB} = 10:4 = 5:2$$

$$\rightarrow 5:2 = \overline{A'B'}:16 \rightarrow \overline{A'B'} = 40$$

$$\text{又 } \overline{A'B'}:\overline{B'C'}:\overline{C'A'} = 4:3:2$$

$$40:\overline{B'C'}:\overline{C'A'} = 40:30:20$$

$$\overline{B'C'} = 30, \overline{C'A'} = 20$$

$$\text{故 } \triangle A'B'C' \text{ 周長} = 20 + 30 + 40 = 90。$$

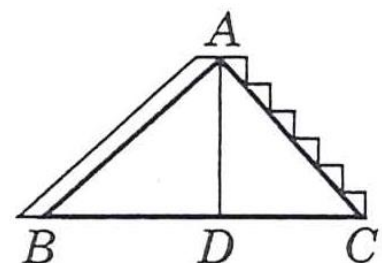
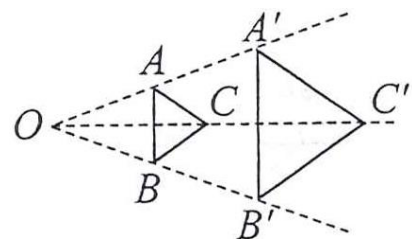
(C)18. 老蕭想在游泳池內建造一座滑水道，樓梯 $\overline{AC} = 6$ 公尺，且 $\overline{CD}$ 為 4 公尺，
若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的夾角為 90° ， $\angle ADC$ 亦為 90° ，則滑水道底部到樓梯底部 $\overline{BC}$ 的距離
為多少公尺？

(A)7(B)8 (C)9(D)10 公尺。

$$\text{解析: } \angle BAC = 90^\circ, \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}, 36 = 4 \times \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = 9。$$



- (**D**)19. 如右圖， $\angle EAC$ 為 $\triangle ABC$ 之一外角， $\overline{AD}$ 平分 $\angle EAC$ ，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{BD} = ?$
(A)12(B)18 (C)20(D)30。

解析：

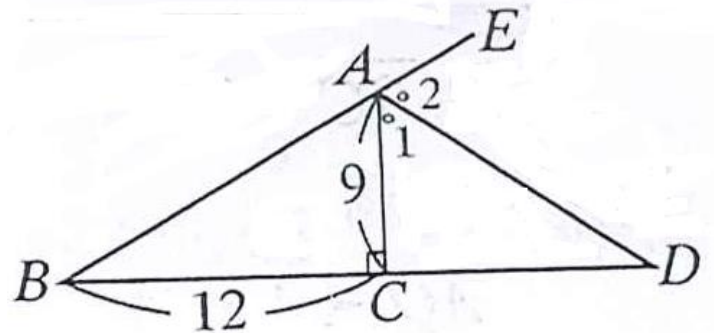
$$\overline{AB} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

且 $\overline{AD}$ 平分 $\angle EAC$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\rightarrow 15:9 = (12 + \overline{CD}) : \overline{CD}$$

$$\rightarrow \overline{CD} = 18, \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 12 + 18 = 30$$



- (**C**)20. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中，圓 O 為半圓， $\overline{CF}$ 為直徑，且半圓分別與 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ 相切於 E 、 C 兩點，若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ，則此半圓的半徑為何？

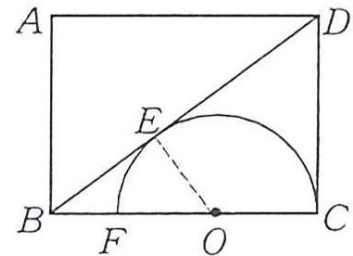
- (A) $\frac{3}{4}$ (B)1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ 。

解析：設半徑為 r ， $\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\overline{OE} = \overline{OC} = r, \overline{OB} = 4 - r$$

$$\text{又 } \overline{DE} = \overline{CD} = 3, \overline{BE} = 5 - 3 = 2$$

$$(4 - r)^2 = r^2 + 2^2, r = \frac{3}{2}。$$



- (**D**)21. Calculate the exact value of $42 - 2 \times (8 - 3) = ?$

翻譯：「 $42 - 2 \times (8 - 3)$ 」計算出正確值？

- (A)200 (B)100 (C)23 (D)32

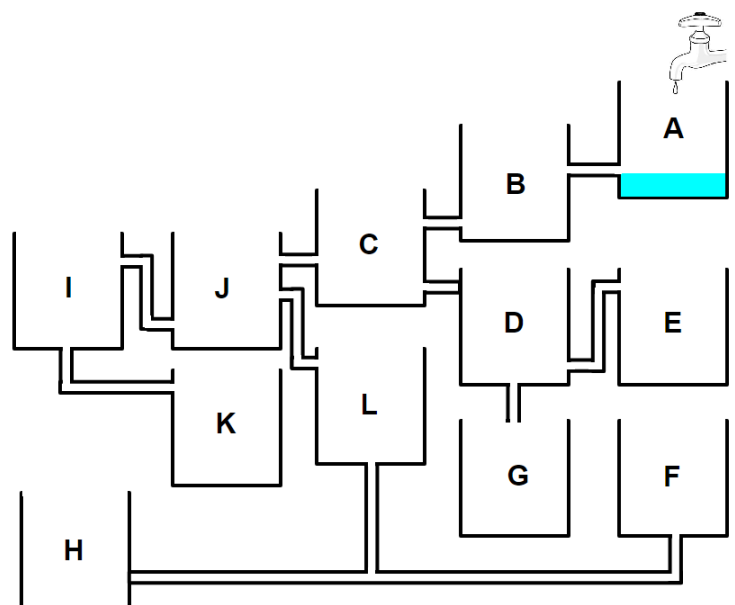
解析：先乘除後加減，括號優先做，原式 $= 42 - 2 \times 5 = 42 - 10 = 32$ 。

- (**A**)22. Which tank will fill up first?

翻譯：哪一個蓄水池最先被裝滿？

- (A)F (B)G (C)K (D)H

解析：D 和 H 都被擋，I 的連通管比 L 高，所以 L 會優先注水，L 最終流入 F，所以 F 會先滿水位。



(**A**)23. Figure out the following number laws:

$$14 \times 2 = 21$$

$$20 \times 4 = 75$$

$$36 \times 9 = 320$$

$$40 \times 10 = ?$$

(A)396 (B)386 (C)376 (D)366。

解析:

$$14 \times 2 = 14 \times 2 - 14 \div 2 = 28 - 7 = 21$$

$$20 \times 4 = 20 \times 4 - 20 \div 4 = 80 - 5 = 75$$

$$36 \times 9 = 36 \times 9 - 36 \div 9 = 320$$

$$40 \times 10 = 40 \times 10 - 40 \div 10 = 396$$

(**D**)24. 1 到 1000 之整數中，將 3 的倍數與 4 的倍數分別以○及△圈起來。

1 2 (3) (4) 5 (6) 7 (8) (9) 10 11 (12) 13 14 (15) (16) 17 (18) 19 (20) (21) 22
23 (24) 25 26

像(3) (4) 與 (8) (9)，這種○與△相鄰的組合有多少組？

(A)164 (B)165 (C)166 (D)167 組。

解析: $[3, 4] = 12$ ，每 12 個數就會有 2 組

$$1000 \div 12 = 83 \dots 4$$

$$2 \times 83 + 1 = 167 \text{ 組，選 D。}$$

(**B**)25. A、B、C、D、E 五人參加考試，滿分為 10 分，得分為整數。

A: 「我 4 分而已。」

B: 「我得最高分。」

C: 「我是 A 和 D 的平均。」

D: 「我是 5 個人的平均。」

E: 「我是得分第二高，我比 C 多 2 分。」

請問 B 得幾分? (A)7 分 (B)8 分 (C)9 分 (D)10 分。

解析: 由 B、C、D、E 談話

(1) $A=4$ ，若 $D < 4$ ，則 D 最低分(D 不可能是 5 個人的平均)

(2) $A=4$ ，若 $D=A=4$ ，則 $C = \frac{A+D}{2} = 4$

又 E 比 C 多 2 分(即 E 得 6 分)，則 D 不可能是 5 個人的平均。

(3)根據(1)(2) $D > A=4$ ，5 人大小 $\rightarrow B > E > D > C > A$

(4) $A=4$ ， $C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+D}{2} \rightarrow D$ 是偶數

①若 $D=10 \rightarrow$ 不合(已知 B 最高)

②若 $D=8 \rightarrow C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$ ， E 比 C 多 2 分， $E=8$

$\rightarrow B = 5 \times 8 - (8+8+6+4) = 14 \dots$ 不合

③若 $D=6 \rightarrow C = \frac{A+D}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$ ， $E=5+2=7$

$\rightarrow B = 5 \times 6 - (7+6+5+4) = 8 \dots$ 符合，選 B 。

二、計算題(每題 25 分)

1. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，兩高 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 相交於 H ，且 $\angle BAC = 75^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

(1)求 $\angle HBD$ 等於多少度？

(2)設 $\overline{BC} = 5$ ，求 $\overline{AD}$ 的長？

(3)試證： $\triangle BDH \cong \triangle ADC$

解析：

(1) $\angle C = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ ，

$\angle HBD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

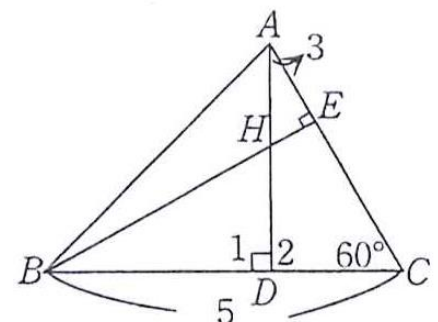
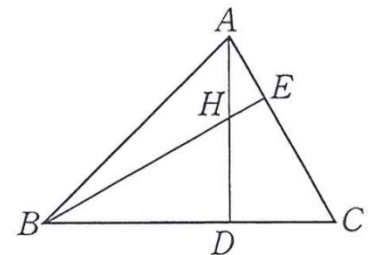
(2) 設 $\overline{AD} = \overline{BD} = x \rightarrow \overline{CD} = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$x + \frac{x}{\sqrt{3}} = 5$ ， $(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})x = 5$ ， $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}x = 5$ ， $x = \frac{15-5\sqrt{3}}{2}$

(3) 證明： $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ， $\angle ABD = \angle BAD = 45^\circ$ ，

$\overline{BD} = \overline{AD}$ ，又 $\angle HBD = \angle 3 = 30^\circ$

$\rightarrow \triangle BDH \cong \triangle ADC$ (ASA)



2. As in the right picture, $\angle A = 90^\circ$ in $\triangle ABC$, there is a circle through a point A, the center of the circle on $\overline{AB}$ and tangent with $\overline{BC}$, if $\overline{BC} = 10$, $\overline{AC} = 6$, the area of the circle?

翻譯:如右圖, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 有一圓通過 A 點, 圓心在 $\overline{AB}$ 上且與 $\overline{BC}$ 相切, 若 $\overline{BC} = 10$, $\overline{AC} = 6$, 求此圓的面積?

解析:

作 $\angle ACB$ 的角平分線交 $\overline{AB}$ 於 O

過 O 作 $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ 於 D

以 O 為圓心, $\overline{OD}$ 為半徑作圓 O

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

設圓 O 的半徑 $= r$, $\overline{OD} = \overline{OA} = r$

又 $\triangle ABC = \triangle BOC + \triangle AOC$

$$\text{即 } \frac{6 \times 8}{2} = \frac{10 \times r}{2} + \frac{6 \times r}{2}, \quad 24 = 5r + 3r, \quad r = 3$$

圓 O 面積 $= 3^2 \pi = 9\pi$ 。

