



2023 第十九屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
19th IMC International Mathematics Contest (Singapore)

國中一年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	A	C	D	C	B	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{5}{11}$	42	$\frac{1}{2}$	40°	2	25°	17640	15

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. In 1, 2, 3,……, 2023, there are _____ numbers that are multiples of 3 or 5.
(A)942 (B)943 (C)944 (D)945

<解析>

$2023 \div 3 = 674 \dots 1$

$2023 \div 5 = 404 \dots 3$

$2023 \div 15 = 134 \dots 13$

符合條件的有 $674 + 404 - 134 = 944$ ，選 C。

2. “*”表示一種運算符號，其意義是 $a * b = 3a - b$ 。如果 $x * (1 * 2) = 2$ ，那麼 $x = (\quad)$ 。(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$1 * 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$

$x * 1 = 2 \rightarrow 3x - 1 = 2, x = 1$

選 A。

3. 已知 a 、 b 、 c 三個數中有兩個奇數、一個偶數， n 是整數。如果 $S = (a + n + 1)(b + 2n + 2)(c + 3n + 3)$ ，那麼()。

(A) S 是偶數

(B) S 是奇數

(C) S 的奇偶性與 n 的奇偶性相同

(D) S 的奇偶性不能確定

<解析>

若 b 為偶數，則 $S = 2(a + n + 1)(\frac{b}{2} + n + 1)(c + 3n + 3) \rightarrow$ 偶數；否則， a 、 c 為一奇一偶， $a + n + 1$ 和 $c + 3n + 3$ 亦為一奇一偶，故 S 為偶數，選 A。

4. 儀表盤上有一排四個開關，如果相鄰的兩個開關不能同時是關的，那麼所有不同的狀態有()。(A)4 種 (B)6 種 (C)8 種 (D)12 種

<解析>

○○○○

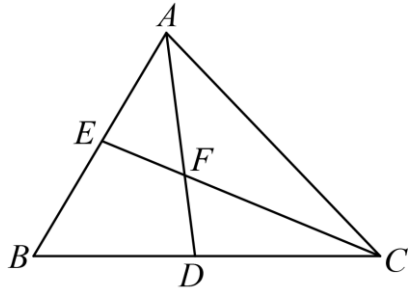
取二個位置為關閉， $(\bigcirc \times \bigcirc \times)$ 、 $(\times \bigcirc \times \bigcirc)$ 、 $(\times \bigcirc \bigcirc \times)$

取一個位置為關閉， $(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \times)$ 、 $(\bigcirc \bigcirc \times \bigcirc)$ 、 $(\bigcirc \times \bigcirc \bigcirc)$ 、 $(\times \bigcirc \bigcirc \bigcirc)$

沒有位置為關閉， $(\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc)$

共 8 種，選 C。

5. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{CE}$ 平分 $\angle ACB$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點， $\overline{AD}$ 、 $\overline{CE}$ 交於 F 點，則 $\angle AFC = \underline{\hspace{1cm}}$ 。(A) 105° (B) 110° (C) 115° (D) 120°



<解析>

$\angle BAC + \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

且 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CE}$ 分別平分 $\angle BAC$ 與 $\angle ACB$

$\therefore \angle CAF + \angle ACF = \frac{1}{2} \times (\angle BAC + \angle ACB) = 60^\circ$

$\therefore \angle AFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，選 D。

6. 數 a 比數 b 與 c 的和多 17， a 的平方比 b 與 c 的和的平方多 2023，那麼 $a + b + c$ 的和等於_____。(A)117 (B)118 (C)119 (D)120

<解析>

$a = (b + c) + 17, a^2 = (b + c)^2 + 2023$

$[(b + c) + 17]^2 = (b + c)^2 + 2023$

令 $(b + c) = x$

$(x + 17)^2 = x^2 + 2023 \rightarrow x^2 + 34x + 289 = x^2 + 2023, 34x = 1734, x = 51$

$\therefore a = 51 + 17 = 68$ ，則 $a + b + c = 68 + 51 = 119$ ，選 C。

7. 已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{a + b}$ ，則 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值是()。(A)3 (B)5 (C)7 (D)9

<解析>

$\frac{a + b}{ab} = \frac{7}{a + b}, (a + b)^2 = 7ab, a^2 + b^2 = 5ab$

$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b^2 + a^2}{ab} = \frac{5ab}{ab} = 5$ ，選 B。

8. 乘積 $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 2022 \times 2024$ 的末兩位數字是_____。
(A)00 (B)12 (C)24 (D)36

<解析>

原式 $= 2^{1012} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 1011 \times 1012)$

其中 $4 \times 25 = 100, 8 \times 125 = 1000$

故末兩位數是 00，選 A。

二、填充題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 從同一副撲克牌中挑出 5 張紅桃、6 張黑桃，這 11 張撲克牌洗勻後背面朝上，再從中抽出 8 張牌，抽出的這 8 張牌中恰好有 4 張紅桃的機率是_____。

<解析>

$$\frac{C_4^5 C_4^6}{C_8^{11}} = \frac{5 \times 15}{165} = \frac{5}{11}$$

2. It is known that n is a positive integer, denoted $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$ (for example, $1! = 1$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ etc.). If $M = 1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 6!$, then there are _____ divisors of M that are perfect square numbers.

<解析>

$$M = 1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 6! = 2^5 \times 3^4 \times 4^3 \times 5^2 \times 6^1 = 2^{12} \times 3^5 \times 5^2$$

$\therefore M$ 的因數 n 是一個完全平方數， $n = 2^{2x} \times 3^{2y} \times 5^{2z}$

且 $0 \leq 2x \leq 12$ ， $0 \leq 2y \leq 5$ ， $0 \leq 2z \leq 2$

故 x 的取法 7 種， y 的取法 3 種， z 的取法 2 種，共有 $7 \times 3 \times 2 = 42$ 種。

3. 計算： $\frac{20242023^2}{20242022^2 + 20242024^2 - 2}$ 的結果為_____。

<解析>

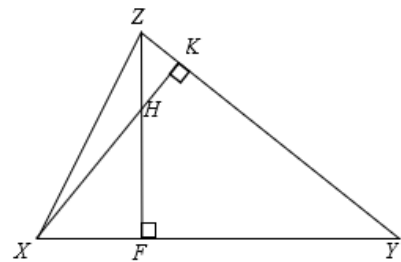
$$\text{令 } a = 20242023, \text{ 原式} = \frac{a^2}{(a-1)^2 + (a+1)^2 - 2} = \frac{a^2}{a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 - 2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

4. 如圖， XK 、 ZF 是 $\triangle XYZ$ 的高且交於一點 H ， $\angle XHF = 40^\circ$ ，那麼 $\angle XYZ =$ _____。

<解析>

$$\angle HXF = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$$

$$\angle XYZ = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$



5. 從 1 分、2 分、5 分三種硬幣中取出 100 枚，總計 3 元，其中 1 分硬幣最少為_____枚。

<解析>

設 1 分硬幣有 x 枚，2 分硬幣有 y 枚，5 分硬幣有 z 枚

$$x + y + z = 100$$

$$x + 2y + 5z = 300$$

$$\rightarrow y + 4z = 200, \text{ 令 } y = 4k, x + z = 100 - 4k, x + 5z = 300 - 8k$$

$$\therefore x = 50 - 3k, y = 4k, z = 50 - k$$

$$50 - 3k \geq 0, \text{ 即 } 0 \leq k \leq 16, \text{ 則 } x = 50 - 3 \times 16 = 2$$

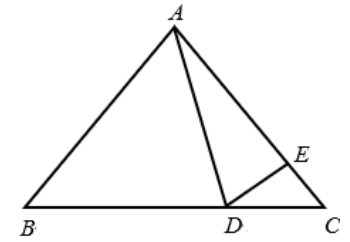
6. 如圖所示， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ， D 在線段 BC 上， $\angle BAD = 50^\circ$ ， $\overline{AE} = \overline{AD}$ ，則 $\angle EDC$ 的度數為()。

<解析>

$$\text{設 } \angle AED = x, \text{ 則 } \angle EAD = 180^\circ - 2x; \angle B = y$$

$$\therefore 2y + 50^\circ + 180^\circ - 2x = 180^\circ, 2x - 2y = 50^\circ, x - y = 25^\circ$$

$$\angle EDC = 180^\circ - y - (180^\circ - x) = 25^\circ$$



7. 某大學畢業生為自主創業於 2021 年 8 月初向銀行貸款 360000 元，與銀行約定“等額本金還款法”分 10 年進行還款，從 2021 年 9 月初開始每個月月初還一次款，貸款月利率為 0.5%，現因經營狀況良好，準備向銀行申請提前還款，計畫於 2027 年 8 月初將剩餘貸款全部一次還清，則該大學畢業生按現計畫的所有還款數額比按原約定所有還款數額少_____元。
(備註：“等額本金還款法”是將本金平均分配到每一期近期還款，每一期所還款金額由兩部分組成。一部分為每期本金，即貸款本金除以還款期數；另一部分是利息，即貸款本金與還本金總額的差乘以利率。1 年按 12 個月計算)

<解析>

$$\text{每月應還本金} = 360000 \div 120 = 3000$$

$$2027 \text{ 年 } 8 \text{ 月還完後，本金還剩 } 360000 - 3000 \times 72 = 144000。$$

$$2027 \text{ 年 } 9 \text{ 月應還利息} = 144000 \times 0.5\%$$

$$2027 \text{ 年 } 10 \text{ 月應還利息} = (144000 - 3000) \times 0.5\%$$

$$2027 \text{ 年 } 11 \text{ 月應還利息} = (144000 - 3000 \times 2) \times 0.5\%$$

....

$$\text{最後一次應還利息} = (144000 - 3000 \times 47) \times 0.5\%$$

$$\therefore \text{後 } 48 \text{ 個月的利息合計} = 144000 \times 48 - 3000 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 47) \times 0.5\% = (6912000 - 3000 \times 1128) \times 0.5\% = 17640$$

8. 將若干個數 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 中的最大數和最小數分別記為 $\max(a_1, a_2, a_3, \dots)$ 和 $\min(a_1, a_2, a_3, \dots)$ ， $a_1, a_2, a_3, \dots$ 是 $1, 2, 3, \dots, 9$ 的一種排列。記 $b_1 = a_1 + a_2 + a_3$ ， $b_2 = a_2 + a_3 + a_4$ ， $b_3 = a_3 + a_4 + a_5$ ，.....， $b_7 = a_7 + a_8 + a_9$ ，則 $\min[\max(b_1, b_2, b_3, \dots, b_7)] =$ _____。

<解析>

$$\text{令 } M = \max(b_1, b_2, b_3, \dots, b_7)$$

$$3M \geq (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) = 1 + 2 + \dots + 9 = 45, \text{ 故 } M \geq 15$$

$$\text{當 } 9, 5, 1, 7, 2, 6, 3, 4, 8 \text{ 時}, M = 15$$

三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

1. 如圖，已知在 $\triangle ABC$ 中，點 D 、 E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上的點，且 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CD}$ 相交於 G 點，如果 $\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} = 2024$ ，求 $\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} \times \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} \times \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}$ 的值。

<解析>

設 $S_{\triangle ABG}=a$ ， $S_{\triangle ACG}=b$ ， $S_{\triangle BCG}=c$

$$\text{則 } \frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} = \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BEG}} = \frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle CEG}} = \frac{S_{\triangle ABG}+S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle BEG}+S_{\triangle CEG}} = \frac{S_{\triangle ABG}+S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle BCG}} = \frac{a+b}{c}$$

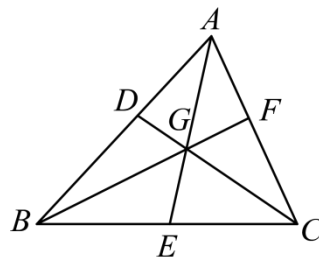
同理可得：

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} = \frac{b+c}{a}$$

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} + \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} + \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} = 2024,$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} \times \frac{\overline{BG}}{\overline{GF}} \times \frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} = \frac{a+b}{c} \times \frac{a+c}{b} \times \frac{b+c}{a} = \frac{(b+c)(a+b)(a+c)}{abc}$$

$$= \frac{a^2b+a^2c+abc+ac^2+ab^2+abc+b^2c+bc^2}{abc} = \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + 2 = 2024 + 2 = 2026$$



2. 有五個數，每兩個不同數的和分別為 4、6、8、10、12、14、16、12、10、8（未按順序排列）。求這五個數的值。

<解析>

設五個數為 a 、 b 、 c 、 d 、 e 且 $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ ，則

$$a+b \leq a+c \leq a+d \leq a+e \leq b+e \leq c+e \leq d+e$$

$$\text{且 } a+b=4, d+e=16, a+c=6, c+e=14$$

$$a+b+c+d+e = \frac{1}{4} \times (4+6+8+10+12+14+16+12+10+8) = 25$$

$$\text{故 } c=25-4-16=5, a=6-c=1, e=14-c=9, b=4-a=3, d=16-e=7$$

<另解>

$$\text{① 令 } a=a_1, b=a_2, c=a_3, d=a_4, e=a_5 \text{ 且 } a \leq b \leq c \leq d \leq e \rightarrow a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a_1+a_2 & \leq & a_1+a_3 & \leq & a_1+a_4 & \leq & a_1+a_5 & \leq & a_2+a_3 & \leq & a_2+a_4 & \leq & a_2+a_5 & \leq & a_3+a_4 & \leq & a_3+a_5 & \leq & a_4+a_5 \\ 4 & & 6 & & & & & & 14 & & 16 & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$\text{② } a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = \frac{1}{4} \times (4+6+8+10+12+14+16+12+10+8) = 25$$

$$\text{③ } a_3=c=25-4-16=5, a_1=a=6-5=1, a_5=e=14-5=9, a_4=d=16-9=7$$