



2023 第十九屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
19th IMC International Mathematics Contest (Singapore)

國中三年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	A	D	B	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{5}{11}$	84°	$(\frac{18}{5}, \frac{6}{5})$	40°	$\frac{2}{9}$	$\frac{22}{3}$	17640	-1

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 兩個瓶子中裝了相同質量的酒精溶液，在一個瓶子中酒精和水的質量之比是 $P:1$ ，而在另一個瓶子中是 $q:1$ ，若把兩瓶溶液混合一起，混合混中的酒精與水的質量之比是()。(A) $\frac{p+q}{2}$ (B) $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ (C) $\frac{2pq}{p+q}$ (D) $\frac{p+q+2pq}{p+q+2}$

<解析>

假設兩瓶酒精質量各為 1，第一瓶酒精質量 $=\frac{p}{1+p}$ ，水質量 $=\frac{1}{1+p}$ ；第二瓶酒精質量 $=\frac{q}{1+q}$ ，水質量 $=\frac{1}{1+q}$

$$\frac{\frac{p}{1+p} + \frac{q}{1+q}}{\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}} = \frac{p(1+q) + q(1+p)}{1+q+1+p} = \frac{p+q+2pq}{p+q+2}, \text{ 選 D。}$$

2. 某班進行一次測試，試卷由 25 道選擇題組成，每題答對得 4 分，不答得 0 分，答錯扣 1 分，那麼下列分數不可能的是()。(A)95 (B)89 (C)79 (D)75

<解析>

設答對 x 題，答錯 y 題，不答 $(25-x-y)$ 題

$$4x + (-1)y + 0 \times (25-x-y) = 4x - y$$

$$4x - y = 95, (x, y) = (24, 1)$$

$$4x - y = 89, (x, y) = (23, 3) \text{ (不合)}$$

$$4x - y = 79, (x, y) = (20, 1)$$

$$4x - y = 75, (x, y) = (19, 1)$$

選 B。

3. It is known that $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ and $b = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, then the value of $\sqrt{a^2+b^2-2}$ is _____.

(A)6 (B)5 (C)4 (D)3

<解析>

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2; b = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2$$

$$a^2 + b^2 - 2 = (\sqrt{5}+2)^2 + (\sqrt{5}-2)^2 - 2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 5 - 4\sqrt{5} + 4 - 2 = 16$$

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2-2} = \sqrt{16} = 4, \text{ 選 C。}$$

4. 如圖，直角梯形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，已知

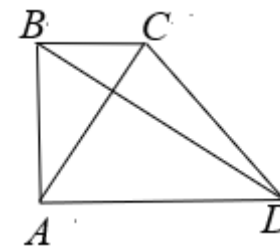
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = k, \text{ 則 } \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \text{_____}。 (A) \sqrt{k} \quad (B) \frac{\sqrt{k}}{2} \quad (C) \frac{2\sqrt{k}}{3} \quad (D) \frac{3\sqrt{k}}{4}$$

<解析>

設 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 E 點，，設 $\overline{AE} = x$ ， $\overline{DE} = y$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = k, \overline{BE} = ky, \overline{CE} = kx, \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE} + \overline{EC}}{\overline{BE} + \overline{ED}} = \frac{x + kx}{y + ky} = \frac{x}{y}$$

$$\text{且 } \overline{AE}^2 = \overline{BE} \times \overline{ED}, x^2 = ky \times y, \text{ 故 } \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \sqrt{k}, \text{ 選 A。}$$



5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\angle A = 36^\circ$ ，延長 $\overline{AC}$ 到 D ，使得 $\overline{CD} = \overline{BC}$ ， P 點是 $\triangle ABD$ 的內心，則 $\angle BPC = \text{_____}$ 。(A) 114° (B) 124° (C) 134° (D) 144°

<解析>

$$\text{設 } \angle A = x, \angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{x}{2}$$

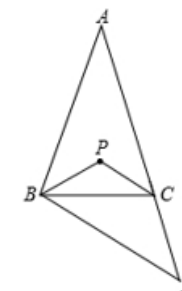
$$\angle CBD = \angle D = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ - \frac{x}{4}$$

$$\angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABD = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle CBD) = \frac{1}{2} (90^\circ - \frac{x}{2} + 45^\circ - \frac{x}{4}) = \frac{1}{2} (135^\circ - \frac{3x}{4})$$

$$\angle PBC = \angle ABC - \angle ABP$$

$$\angle BPC = 180^\circ - 2 \angle PBC = 180^\circ - 2 (\angle ABC - \angle ABP) = x + 2 \angle ABP$$

$$= x + 135^\circ - \frac{3x}{4} = 135^\circ + \frac{x}{4} = 144^\circ, \text{ 選 D。}$$



6. 從 1 分、2 分、5 分三種硬幣中取出 100 枚，總計 3 元，其中 1 分硬幣最少為 _____ 枚。(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

設 1 分硬幣有 x 枚，2 分硬幣有 y 枚，5 分硬幣有 z 枚

$$x + y + z = 100$$

$$x + 2y + 5z = 300$$

$$\rightarrow y + 4z = 200, \text{ 令 } y = 4k, x + z = 100 - 4k, x + 5z = 300 - 8k$$

$$\therefore x = 50 - 3k, y = 4k, z = 50 - k$$

$$50 - 3k \geq 0, \text{ 即 } 0 \leq k \leq 16, \text{ 則 } x = 50 - 3 \times 16 = 2, \text{ 選 B。}$$

7. 乘積 $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 2022 \times 2024$ 的末兩位數字是_____。

(A)00 (B)12 (C)24 (D)36

<解析>

$$\text{原式} = 2^{1012} \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 1011 \times 1012)$$

$$\text{其中 } 4 \times 25 = 100, 8 \times 125 = 1000$$

故末兩位數是 00，選 A。

8. 計算: $\frac{20242023^2}{20242022^2 + 20242024^2 - 2}$ 的結果為_____。 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

<解析>

$$\text{令 } a = 20242023, \text{ 原式} = \frac{a^2}{(a-1)^2 + (a+1)^2 - 2} = \frac{a^2}{a^2 - 2a + 1 + a^2 + 2a + 1 - 2} = \frac{1}{2}, \text{ 選 B。}$$

二、填充題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 從同一副撲克牌中挑出 5 張紅桃、6 張黑桃，這 11 張撲克牌洗勻後背面朝上，再從中抽出 8 張牌，抽出的這 8 張牌中恰好有 4 張紅桃的機率是_____。

<解析>

$$\frac{C_4^5 C_4^6}{C_8^{11}} = \frac{5 \times 15}{165} = \frac{5}{11}$$

2. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ， $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC}$ ，若 $\angle BAD = 27^\circ$ ，則 $\angle B =$ _____。

<解析>

在 $\overline{AC}$ 上取一點 E ，使得 $\overline{AE} = \overline{AB}$

則 $\triangle ABD \cong \triangle AED$ (SAS 全等)

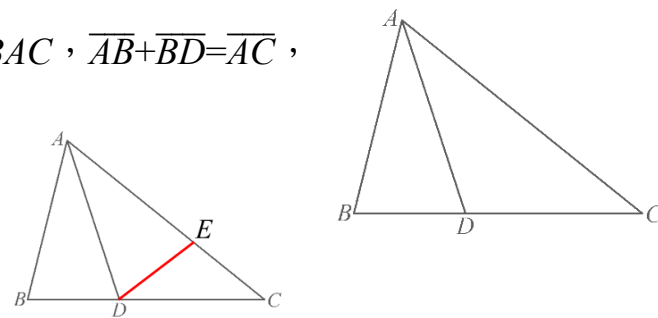
$$\therefore \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$$

$$\text{設 } \angle B = x, \angle AED = x \rightarrow \angle ECD = 0.5x$$

$$0.5x + 27 + 27 + x = 180$$

$$1.5x = 126$$

$$x = 84$$



3. 直線 $y = -3x + 6$ 與 x 軸、 y 軸分別交於 P 、 Q 兩點，把 $\triangle POQ$ 沿 $\overline{PQ}$ 翻折，點 O 落在 R 處，則 R 點的坐標是_____。

<解析>

$$\text{設 } R(x, y), A(x, 0), B(x, 6), \text{ 則 } \overline{AP}^2 + \overline{AR}^2 = \overline{PR}^2 = \overline{OR}^2$$

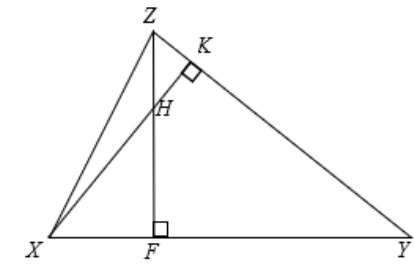
$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2, \text{ 同理 } x^2 + (6-y)^2 = 6^2, x = \frac{18}{5}, y = \frac{6}{5}$$

4. 如圖， XK 、 ZF 是 $\triangle XYZ$ 的高且交於一點 H ， $\angle XHF = 40^\circ$ ，那麼 $\angle XYZ =$ _____。

<解析>

$$\angle HXF = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$$

$$\angle XYZ = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$



5. Let x_1 and x_2 are the two real roots of the equation $2x^2 - 4mx + 2m^2 + 3m - 1 = 0$,

Then the minimum value of $x_1^2 + x_2^2$ is _____.

<解析>

$$D = (-4m)^2 - 4 \times 2 \times (2m^2 + 3m - 1) \geq 0, 16m^2 - 16m^2 - 24m + 8 \geq 0, m \leq \frac{1}{3}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-4m)}{2} = 2m, x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 3m - 1}{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2m)^2 - (2m^2 + 3m - 1) = 2m^2 - 3m + 1$$

關於 m 的二次函數開口向上，對稱軸 $m = \frac{3}{4}$

$$\text{當 } m = \frac{1}{3} \text{ 時, } x_1^2 + x_2^2 \text{ 的最小值} = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 - 3 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{9}$$

6. 以 $RT\triangle ABC$ 的斜邊 $\overline{AB}$ 為直徑作圓 O ， G 為 $\triangle ABC$ 的重心， P 點為圓 O 上一個動點， M 為 $\overline{GP}$ 的中點，若 $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 6$ ，求 $\overline{AM}$ 的最大值是_____。

<解析>

$$\text{設 } \overline{OG} \text{ 中點為 } N, \text{ 則由中線定理 } \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{OP} = \frac{5}{2}$$

$$\text{設 } \overline{BC} \text{ 中點為 } Q, \text{ 由重心定理, } \overline{AG} = \frac{2}{3} \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CQ}^2} = \frac{2}{3} \sqrt{6^2 + 4^2} = \frac{4}{3} \sqrt{13}$$

$$\overline{OG} = \frac{1}{3} \overline{OC} = \frac{5}{3},$$

$$\overline{AN} = \sqrt{\frac{1}{2} (\overline{AG}^2 + \overline{AO}^2) - \frac{1}{4} \overline{OG}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{16 \times 13}{9} + 25 \right) - \frac{1}{4} \times \frac{25}{9}} = \frac{29}{6}$$

$$\overline{AM} \leq \overline{AN} + \overline{NM} = \frac{29}{6} + \frac{5}{2} = \frac{22}{3}$$

7. 某大學畢業生為自主創業於 2021 年 8 月初向銀行貸款 360000 元，與銀行約定“等額本金還款法”分 10 年進行還款，從 2021 年 9 月初開始每個月月初還一次款，貸款月利率為 0.5%，現因經營狀況良好，準備向銀行申請提前還款，計畫於 2027 年 8 月初將剩餘貸款全部一次還清，則該大學畢業生按現計畫的所有還款數額比按原約定所有還款數額少_____元。

(備註：“等額本金還款法”是將本金平均分配到每一期近期還款，每一期所還款金額由兩部分組成。一部分為每期本金，即貸款本金除以還款期數；另一部分是利息，即貸款本金與還本金總額的差乘以利率。1 年按 12 個月計算)

<解析>

每月應還本金=360000÷120=3000

2027 年 8 月還完後，本金還剩 360000-3000×72=144000。

2027 年 9 月應還利息=144000×0.5%

2027 年 10 月應還利息=(144000-3000)×0.5%

2027 年 11 月應還利息=(144000-3000×2)×0.5%

....

最後一次應還利息=(144000-3000×47)×0.5%

∴後 48 個月的利息合計=144000×48-3000×(1+2+3+...+47)×0.5%=(6912000-3000×1128)×0.5%=17640

8. 當 $x=\frac{1+\sqrt{2024}}{2}$ 時，多項式 $(4x^3-2027x-2024)^{2023}$ 的值為_____。

<解析>

$x=\frac{1+\sqrt{2024}}{2} \rightarrow 2x-1=\sqrt{2024}$ ， $(2x-1)^2=2024$ ， $4x^2-4x-2023=0$

$4x^3-2027x-2024=x(4x^2-4x-2023)+4x^2-4x-2023-1=-1$

則 $(-1)^{2023}=-1$

三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

1. 已知拋物線 $y=x^2+2px+2p-2$ 的頂點為 M ，

(1)求證拋物線與 x 軸必有兩個不同交點；

(2)設拋物線與 x 軸的交點分別有 A 、 B ，求實數 p 的值使 $\triangle ABM$ 面積達到最小。

<解析>

(1) $\Delta=4p^2-8p+8=4(p-1)^2+4>0$ ，拋物線與 x 軸必有兩個不同交點

(2)設 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$

則 $|\overline{AB}|^2=|x_2-x_1|^2=[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]^2=(4p^2-8p+8)^2=[4(p-1)^2+4]^2$

∴ $|\overline{AB}|=2\sqrt{(p-1)^2+1}\geq 1$

由題，頂點 $M(-p, -p^2+2p-2)$ ，故 AB 邊上的高 $h=p^2-2p+2=(p-1)^2+1\geq 1$

$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}|\overline{AB}|h\geq \frac{1}{2}\times 1\times 1$ ，當 $p=1$ ， $\triangle ABM$ 面積達到最小。

2. 如圖所示， P 為圓 O 外一點， $\overline{PA}$ 切圓 O 於 A 點， $\overline{PBC}$ 為圓 O 的割線， $\overline{AD}$ 垂直 $\overline{PO}$ 於 D 點， $\angle APO=30^\circ$ 求 $\frac{\overline{DC}-\overline{DB}}{\overline{BC}}$ 。

<解析>

連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ ， $\overline{OA}\perp\overline{AP}$ 又 $\overline{AD}\perp\overline{PO}$

① $\overline{AP}^2=\overline{PD}\times\overline{PO}$

② $\overline{PB}\times\overline{PC}=\overline{AP}^2=\overline{PD}\times\overline{PO}$

且 $BCOD$ 共圓，故 $\angle POB=\angle PCD$

$\angle PDB=\angle PCO$ 又 $\angle OPC$ 為公共角

故 $\triangle POB\cong\triangle PCD$ ， $\triangle PDB\cong\triangle PCO$

∴ $\frac{\overline{PO}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{CD}}$ ， $\frac{\overline{PB}}{\overline{PO}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{CO}}$

∴ $\frac{\overline{DC}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{PO}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{PO}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{PB}}$

∴ $\frac{\overline{DC}-\overline{DB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DC}-\overline{DB}}{\overline{PC}-\overline{PB}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{PO}}=\sin\angle APO=\frac{1}{2}$

