2023 第十九屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
19th IMC International Mathematics Contest (Singapore)

國中二年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:________________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	C	B	C	B	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{5}{11}$	42	4	$(\frac{18}{5},\frac{6}{5})$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	17640	-1

學生資料 Examinee
Country/國家:________ City/市(省):________ School/學校:________
Name/姓名:________ Sex/性別:________ Instructor/指導老師:________

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

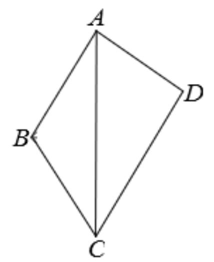
1. If $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{7}{a+b}$, then the value of $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ is ________. (A)3　(B)5　(C)7　(D)9

<解析>

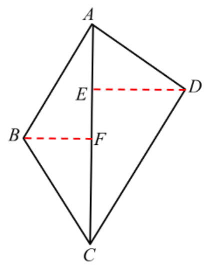
$\frac{a+b}{ab}=\frac{7}{a+b}$，$(a+b)^2=7ab$，$a^2+b^2=5ab$

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{5ab}{ab}=5$，選 B。

2. 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90^\circ$，$\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{3}$，$\overline{AC}=6$，$\overline{AD}=3$，則$\overline{CD}$的長是(　　)。 (A)4　(B)$4\sqrt{3}$　(C)$3\sqrt{3}$　(D)$2\sqrt{3}$



<解析>



作$\overline{DE}\perp\overline{AC}$且$\overline{BF}\perp\overline{AC}$

△ABF，$\overline{AB}=2\sqrt{3}$，$\overline{AF}=3$，$\overline{BF}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$

∴△ABF 是 30˚-60˚-90˚ 的直角△➔$\angle BAF=30^\circ$

則$\angle EAD=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

∴△ADE 是 30˚-60˚-90˚ 的直角△➔$\overline{AD}=3$，$\overline{AE}=\frac{3}{2}$，$\overline{DE}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\overline{CE}=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，$\overline{CD}=\sqrt{(\frac{9}{2})^2+(\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}=\sqrt{\frac{108}{4}}=3\sqrt{3}$，選 C。

3. 已知 $b>a>0$，$a^2+b^2=3ab$，則 $\frac{a+b}{a-b}$ 等於(　　)。
(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{3}$

<解析>

$a^2+b^2=3ab$➔$a^2-2ab+b^2=ab$

$(a-b)^2=ab\to a-b=\sqrt{ab}$

同理 $a^2+2ab+b^2=5ab$，$(a+b)^2=5ab$，$a+b=\sqrt{5ab}$

$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}=\frac{5ab}{ab}=5$，且 $b>a>0$，$\frac{a+b}{a-b}=-\sqrt{5}$，選 C。

4. 若$|x|=2$，$\sqrt{y}=3$，且 $xy<0$，則 $x-y$=__________。(A)-9 (B)-11 (C)-13 (D)-15

<解析>

$xy<0\to x$、y 為異號數

當 $y=9$，則$|x|=2$，取 $x=-2$

故 $x-y=-2-9=-11$，選 B。

5. It is known that (x^2+x-6) is a factor of the polynomial $(2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1)$, then $a-b$=______ . (A)11　(B)12　(C)13　(D)14

<解析>

$2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1=(x+3)(x-2)Q(x)$

令 $x=2$，$32+8-4a+2b+a+b-1=0$，$3a-3b=39$，$a-b=13$

選 C。

6. 從 1 分、2 分、5 分三種硬幣中取出 100 枚，總計 3 元，其中 1 分硬幣最少為________枚。 (A)1　(B)2　(C)3　(D)4

<解析>

設 1 分硬幣有 x 枚，2 分硬幣有 y 枚，5 分硬幣有 z 枚

$x+y+z=100$

$x+2y+5z=300$

➔$y+4z=200$，令 $y=4k$，$x+z=100-4k$，$x+5z=300-8k$

∴$x=50-3k$，$y=4k$，$z=50-k$

$50-3k\geq0$，即 $0\leq k\leq16$，則 $x=50-3\times16=2$，選 B。

7. 乘積 2×4×6×8×………×2022×2024 的末兩位數字是________。
(A)00　(B)12　(C)24　(D)36

<解析>

原式$=2^{1012}\times(1\times2\times3\times4\times\ldots\times1011\times1012)$

其中 4×25=100，8×125=1000

故末兩位數是 00，選 A。

8. 計算: $\dfrac{20242023^2}{20242022^2+20242024^2-2}$的結果為________。 (A)$\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

<解析>

令 a=20242023，原式$=\dfrac{a^2}{(a-1)^2+(a+1)^2-2}=\dfrac{a^2}{a^2-2a+1+a^2+2a+1-2}=\dfrac{1}{2}$

選 B。

二、填充題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 從同一副撲克牌中挑出 5 張紅桃、6 張黑桃，這 11 張撲克牌洗勻後背面朝上，再從中抽出 8 張牌，抽出的這 8 張牌中恰好有 4 張紅桃的機率是_______。

<解析>

$\dfrac{C_4^5C_4^6}{C_8^{11}}=\dfrac{5\times15}{165}=\dfrac{5}{11}$

2. It is known that n is a positive integer, denoted $1\times2\times3\times\ldots\times n=n!$ (for example, $1!=1$, $4!=1\times2\times3\times4$ etc.). If $M=1!\times2!\times3!\times\ldots\times6!$, then there are ______ divisors of M that are perfect square numbers.

<解析>

$M=1!\times2!\times3!\times\ldots\times6!=2^5\times3^4\times4^3\times5^2\times6^1=2^{12}\times3^5\times5^2$

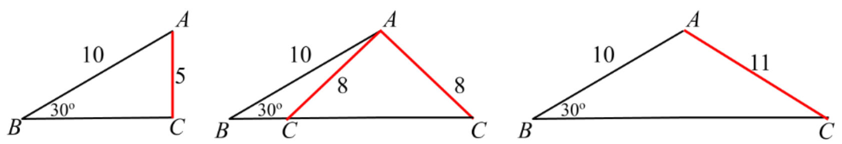
∵M 的因數 n 是一個完全平方數，$n=2^{2x}\times3^{2y}\times5^{2z}$

且 $0\le2x\le12$，$0\le2y\le5$，$0\le2z\le2$

故 x 的取法 7 種，y 的取法 3 種，z 的取法 2 種，共有 $7\times3\times2=42$ 種。

3. △ABC 中，$\angle ABC=30^\circ$，邊 AB=10，邊 AC 可以取值 5、8、11 之一，滿足這些條件的互不全等的三角形的個數是(　　)。

<解析>



共有 4 種畫法。

4. 直線 $y=-3x+6$ 與 x 軸、y 軸分別交於 P、Q 兩點，把△POQ 沿$\overline{PQ}$翻折，點 O 落在 R 處，則 R 點的坐標是_________。

<解析>

設 $R(x, y)$，$A(x, 0)$，$B(x, 6)$，則$\overline{AP}^2+\overline{AR}^2=\overline{PR}^2=\overline{OR}^2$

$(x-2)^2+y^2=2^2$，同理 $x^2+(6-y)^2=6^2$，$x=\frac{18}{5}$，$y=\frac{6}{5}$

5. 設△ABC 的兩邊 AC 和 BC 之和為 a，M 為$\overline{AB}$的中點，$\overline{MC}=\overline{MA}=1$，則 a 的最大值是________。

<解析>

$\overline{MC}=\overline{MA}=\overline{MB}$，故$\angle ACB=90^\circ$

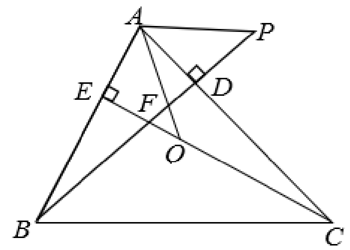
由 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2=2^2=4$

$(\overline{AC}-\overline{BC})^2\ge0$，$2\overline{AC}\times\overline{BC}\le\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4$

故 $a=\sqrt{(\overline{AC}+\overline{CB})^2}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2\overline{AC}\times\overline{BC}}\le\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

當$\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{2}$可取值。

6. 如圖所示，$\overline{BD}$、$\overline{CE}$分別是△ABC 的邊 AC 和 AB 上的高，P 點在$\overline{BD}$的延長線上，$\overline{BP}=\overline{AC}$，點 O 在$\overline{CE}$上，$\overline{CO}=\overline{AB}$，求$\dfrac{\overline{PO}}{\overline{AP}}$=________。



<解析>

$\angle ACO=90^\circ-\angle BAC=\angle ABP$ 又

$\overline{BP}=\overline{AC}$，$\overline{CO}=\overline{AB}$

故△OCA≅△$ABP(SAS)$，$\overline{AO}=\overline{AP}$，$\angle OAC=\angle P$

∴$\angle OAP=\angle OAC+\angle DAP=\angle P+\angle DAP=90^\circ$

$\dfrac{\overline{PO}}{\overline{AP}}=\dfrac{\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{AO}^2}}{\overline{AP}}=\sqrt{2}$

7. 某大學畢業生為自主創業於 2021 年 8 月初向銀行貸款 360000 元，與銀行約定”等額本金還款法”分 10 年進行還款，從 2021 年 9 月初開始每個月月初還一次款，貸款月利率為 0.5%，現因經營狀況良好，準備向銀行申請提前還款，計畫於 2027 年 8 月初將剩餘貸款全部一次還清，則該大學畢業生按現計畫的所有還款數額比按原約定所有還款數額少______元。

(備註:”等額本金還款法”是將本金平均分配到每一期近期還款，每一期所還款金額由兩部分組成。一部分為每期本金，即貸款本金除以還款期數；另一部分是利息，即貸款本金與還本金總額的差乘以利率。1 年按 12 個月計算)

<解析>

每月應還本金=360000÷120=3000

2027 年 8 月還完後，本金還剩 360000-3000×72=144000。

2027 年 9 月應還利息=144000×0.5%

2027 年 10 月應還利息=(144000-3000)×0.5%

2027 年 11 月應還利息=(144000-3000×2)×0.5%

....

最後一次應還利息=(144000-3000×47)×0.5%

∴後 48 個月的利息合計=144000×48-3000×(1+2+3+…+47) ×0.5%=(6912000-3000×1128) ×0.5%=17640

8. 當 $x=\frac{1+\sqrt{2024}}{2}$時，多項式$(4x^3-2027x-2024)^{2023}$的值為______。

<解析>

$x=\frac{1+\sqrt{2024}}{2} \Rightarrow 2x-1=\sqrt{2024}$，$(2x-1)^2=2024$，$4x^2-4x-2023=0$

$4x^3-2027x-2024=x(4x^2-4x-2023)+4x^2-4x-2023-1=-1$

則$(-1)^{2023}=-1$

三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

1. 以 $RT\triangle ABC$ 的斜邊$\overline{AB}$為直徑作圓 O，G 為$\triangle ABC$ 的重心，P 點為圓 O 上一個動點，M 為$\overline{GP}$的中點，若$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=6$，求$\overline{AM}$的最大值。

<解析>

設$\overline{OG}$中點為 N，則由中線定理$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{5}{2}$

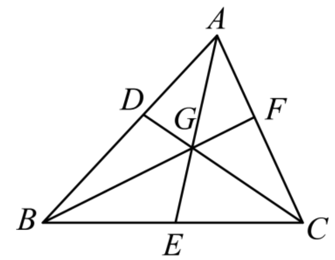
設$\overline{BC}$中點為 Q，由重心定理，$\overline{AG}=\frac{2}{3}\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CQ}^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6^2+4^2}=\frac{4}{3}\sqrt{13}$

$\overline{OG}=\frac{1}{3}\overline{OC}=\frac{5}{3}$，

$\overline{AN}=\sqrt{\frac{1}{2}(\overline{AG}^2+\overline{AO}^2)-\frac{1}{4}\overline{OG}^2}=\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{16\times13}{9}+25)-\frac{1}{4}\times\frac{25}{9}}=\frac{29}{6}$

$\overline{AM}\le\overline{AN}+\overline{NM}=\frac{29}{6}+\frac{5}{2}=\frac{22}{3}$

2. 如圖，已知在$\triangle ABC$ 中，點 D、E、F 分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上的點，且$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$相交於 G 點，如果$\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}+\frac{\overline{BG}}{\overline{GF}}+\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=2024$，求$\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GF}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}$的值。



<解析>

設 $S_{\triangle ABG}=a$，$S_{\triangle ACG}=b$，$S_{\triangle BCG}=c$

則$\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}=\frac{S_{\Delta ABG}}{S_{\Delta BEG}}=\frac{S_{\Delta ACG}}{S_{\Delta CEG}}=\frac{S_{\Delta ABG}+S_{\Delta ACG}}{S_{\Delta BEG}+S_{\Delta CEG}}=\frac{S_{\Delta ABG}+S_{\Delta ACG}}{S_{\Delta BCG}}=\frac{a+b}{c}$

同理可得:

$\frac{\overline{BG}}{\overline{GF}}=\frac{a+c}{b}$，$\frac{\overline{CG}}{\overline{DG}}=\frac{b+c}{a}$

$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}+\frac{\overline{BG}}{\overline{GF}}+\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=2024$，

$\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}\times\frac{\overline{BG}}{\overline{GF}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{a+b}{c}\times\frac{a+c}{b}\times\frac{b+c}{a}=\frac{(b+c)(a+b)(a+c)}{abc}$

$=\frac{a^2b+a^2c+abc+ac^2+ab^2+abc+b^2c+bc^2}{abc}$

$=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+2=2024+2=2026$