


**2023 第十九屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)**  
 19<sup>th</sup> IMC International Mathematics Contest (Singapore)

國小六年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:\_\_\_\_\_

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！  
 ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	C	D	C	C	A	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	5	2275	496	70	38.28	9	216	180

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 計算:  $\frac{3}{5} \div [2\frac{3}{4} \times 4.72 \div (4.1\bar{6} \div 1\frac{2}{3})] \times 7.8 = ( )$ 。(A)  $\frac{9}{10}$  (B) 1 (C)  $2\frac{5}{6}$  (D)  $7\frac{3}{8}$

<解析>

$$\text{原式} = \frac{3}{5} \div [\frac{11}{4} \times \frac{52}{11} \div (\frac{25}{6} \times \frac{3}{5})] \times \frac{78}{10} = \frac{3}{5} \div [\frac{11}{4} \times \frac{52}{11} \div \frac{78}{10}] \times \frac{78}{10}$$

$$= \frac{3}{5} \div [\frac{11}{4} \times \frac{52}{11} \times \frac{10}{78}] \times \frac{78}{10}$$

$$= \frac{3}{5} \div [\frac{11}{4} \times \frac{52}{11} \times \frac{10}{78}] \times \frac{78}{10}$$

$$= \frac{3}{5} \div [\frac{11}{4} \times \frac{52}{11} \times \frac{10}{78}] \times \frac{78}{10}$$

$$= \frac{3}{5} \div [\frac{11}{4} \times \frac{52}{11} \times \frac{10}{78}] \times \frac{78}{10}$$

選 A。

2. 雞兔同籠，雞比兔的 3 倍多 5 隻，而雞的總腳數比兔的總腳數多 32 隻，那麼兔有( )隻。(A)11 (B)20 (C)33 (D)38

<解析>

$$32 - 5 \times 2 = 22$$

$$22 \div (3 - 1) = 11$$

$$11 \times 1 = 11$$

選 A。

3. If the figure as shown is an “ox head-shaped” polygon, then what is the sum of  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ ? (A)  $180^\circ$  (B)  $270^\circ$  (C)  $360^\circ$  (D)  $450^\circ$

<解析>

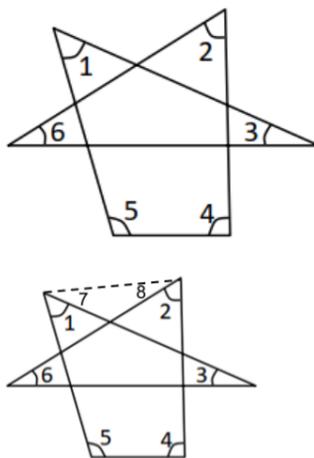
畫上輔助線

$$\angle 3 + \angle 6 = \angle 7 + \angle 8$$

$$\text{則 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 7 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 8 =$$

$$\text{四邊形內角和} = 360^\circ$$

選 C。



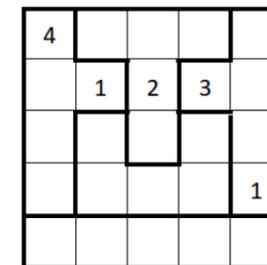
4. 把自然數從 1 開始一直寫下去 123456789101112.....，一共寫了 2023 個數字，那麼最後一個數字是( )。(A)1 (B)2 (C)3 (D)7

<解析>

$$2023 - 9 - 180 = 1834$$

$$1834 \div 3 = 611 \dots 1$$
，寫了 611 個三位數，再寫 1 個數字  
 寫到  $99 + 611 = 710$ ，第 2023 個數字是 711，百位數字是 7。  
 選 D。

5. 如圖，完成五宮數獨，使得每行每列每個粗線圍成的區域內都是 1~5 各一個。那麼從上到下第三行，從左到右形成的五位數為( )。(A)14523 (B)25341 (C)32415 (D)34152



<解析>

4	3	1	5	2
5	1	2	3	4
3	2	4	1	5
2	5	3	4	1
1	4	5	2	3

中間數=32415，選 C。

6. 小明、小麗、小亮、小芳四人玩倒水遊戲，一個水缸盛有水 20 升，每次按照小明倒出 6 升、小麗倒入 5 升、小亮倒出 4 升、小芳倒入 3 升，迴圈倒水。那麼四人共倒水( )次，剛好把水缸中的水倒完。(A)7 (B)28 (C)29 (D)40

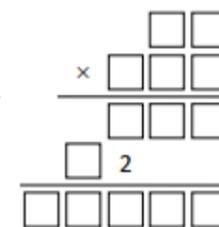
<解析>

$$-6 + 5 - 4 + 3 = -2$$
 (表示一輪少 2 升)

$$(20 - 6) \div 2 = 7$$
，7 個週期

$$7 \times 4 + 1 = 29$$
，選 C。

7. 如圖，在乘法數字謎中，每個方框內填入一個適當數字，使得算式成立。那麼乘積為( )。(A)10028 (B)10074 (C)10120 (D)10143



<解析>

$$\begin{array}{r} \phantom{\times} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \times \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \end{array}$$

$$92 \times 108 = 10028$$

選 A。

8. 書架上原有 7 本書，插入新買的 3 本互不相同的數學書，那麼共有 \_\_\_\_\_ 種放法。(A)35 (B)56 (C)336 (D)720

<解析>

7 本書有 8 個空格，每多放一本書，空格多 1 個

故  $8 \times 9 \times 10 = 720$

選 D。

二、填充題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 計算： $(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{2}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4} + \frac{3}{1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 5 \times 6} + \dots + \frac{10}{1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 19 \times 20}) \times 7 =$  \_\_\_\_\_。

<解析>

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left( \frac{1}{\frac{1 \times 2 \times 3}{3}} + \frac{2}{\frac{3 \times 4 \times 5}{3}} + \frac{3}{\frac{5 \times 6 \times 7}{3}} + \dots + \frac{10}{\frac{19 \times 20 \times 21}{3}} \right) \times 7 \\ &= \frac{3}{2} \times \left( \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{19 \times 21} \right) \times 7 \\ &= \frac{3}{4} \times \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{21} \right) \times 7 = 5 \end{aligned}$$

2. 把 2023 與 365 排成一行，用加減乘除符號各一次填入它們數字之間，可以用一次小括弧，得到的整數結果最大是 \_\_\_\_\_。(數字之間沒有運算符號可以看作多位數)

2 0 2 3 3 6 5

<解析>

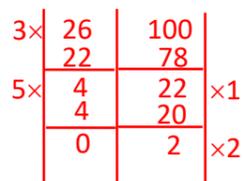
$$(2-0 \div 2+33) \times 65 = 2275$$

3. 從長為 100 公分，寬為 26 公分的長方形紙片上，每次剪下盡可能大的正方形，最後剩下也是一個正方形，那麼所有正方形的周長之和為 \_\_\_\_\_ 公分。

<解析>

小正方形 =  $3+1+5+2=11$  個

$$\begin{aligned} \text{周長之和} &= (26 \times 3 + 22 \times 1 + 4 \times 5 + 2 \times 2) \times 4 \\ &= 124 \times 4 = 496 \text{ 公分} \end{aligned}$$



4. 一項工作由甲、乙合作恰可在規定時間內完成。如果甲工作效率提高 20%，則實際用時比規定時間省 10%；如果乙工效降低 15%，那麼就要推遲 5 天才能完成。那麼規定時間為 \_\_\_\_\_ 天。

<解析>

甲獨立完成需  $x$  天，乙獨立完成需  $y$  天  $\rightarrow$  甲  $= \frac{1}{x}$ ，乙  $= \frac{1}{y}$

規定時間  $A$  天

$$A \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{9}{10} A \left( \frac{6}{5x} + \frac{1}{y} \right) = (A+5) \left( \frac{1}{x} + \frac{17}{20y} \right)$$

$$A \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{9}{10} A \left( \frac{6}{5x} + \frac{1}{y} \right) \rightarrow \frac{1}{10} y = \frac{4}{50} x, \frac{5}{y} = \frac{4}{x}, x:y=4:5$$

$$A \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = (A+5) \left( \frac{1}{x} + \frac{17}{20y} \right)$$

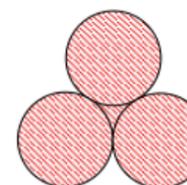
$$A \times \frac{9}{20} = (A+5) \times \frac{42}{100}$$

$$45A = (A+5) \times 42$$

$$3A = 5 \times 42$$

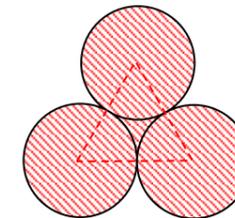
$$A = 70$$

5. The figure shows three equal circles with radius (半徑) of 2 centimeters touching each other. Let the value of  $\pi$  as 3.14, and the area of (面積) equilateral triangle (等邊三角形) with side length of 1 cm equals 0.43  $\text{cm}^2$ . What is the area of the shape in  $\text{cm}^2$ ?



<解析>

$$\text{面積} = \pi \times 2 \times 2 \times 2.5 + 0.43 \times 4 \times 4 = 31.4 + 6.88 = 38.28$$



6. 一片草地的草均勻生長，放牧一些羊可以在規定時間內吃完這片草，如果增加 30 隻羊，可以提前 3 天吃完，如果減少 24 隻羊，需要延誤 6 天吃完，那麼放牧原來的羊數，需要 \_\_\_\_\_ 天才吃完。

<解析>

設原來放牧  $x$  隻羊，原計畫  $y$  天完成，牧草每天生長量為  $z$

$$(x-z)y = (x-z+30)(y-3), (x-z)y = (x-z-24)(y+6)$$

$$x-z=60, y=9-$$

原計畫 9 天吃完。

7. 四位七進制數  $abcd_{(7)}$ ，不含數字 0，且  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  兩兩相異，且數字和不大于  $14_{(7)}$ ，那麼的四位數共有 \_\_\_\_\_ 個。

<解析>

$$a+b+c+d \leq 14, \text{七進位 } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

數字和 = 10,  $10 = 1234$  (24 種)

數字和 = 11,  $11 = 1235$  (24 種)

數字和 = 12,  $12 = 1236$  (24 種)、 $1245$  (24 種)

數字和 = 13,  $13 = 1246$  (24 種)、 $1345$  (24 種)

數字和 = 14,  $14 = 2345$  (24 種)、 $1256$  (24 種)、 $1346$  (24 種)

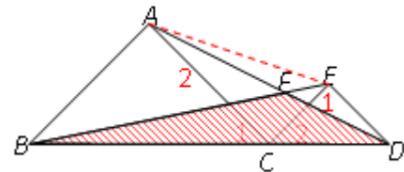
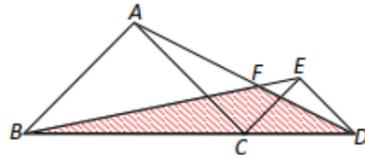
$$24 \times 9 = 216$$

8. 如圖，已知等腰直角 $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 的面積分別為 280 和 70，且斜邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 在一條直線上，連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 交於 $F$ 點，那麼陰影三角形的面積為\_\_\_\_\_。

<解析>

如圖，連接 $AE$ ， $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDE$ 面積之比為 $280:70=4:1$

邊長比 $=2:1$ ，陰影三角形面積為 $280 \times \frac{1}{3} + 70 \times \frac{2}{3} + 140 \times \frac{2}{7} = 180$



三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

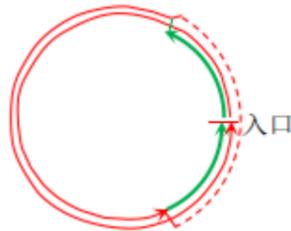
1. 如圖，一條環形觀光路線長為 5.5 公里，一個旅遊團來此觀光遊玩，只租用了一輛觀光車，以便大家步行一段，坐車一段，觀光車空駛速度為 18 公里/時，滿載速度為 12 公里/時，人步行速度為 3 公里/時，旅遊團一半旅客先坐車，另一半步行，先坐車的旅客在途中全部下車步行，觀光車繼續向前空駛，觀光車追上開始步行旅客時，立即帶上他們去追途中下車步行的另一半旅客，結果步行者與乘車者同時到達開始入口處，那麼旅遊團在這條觀光路線上遊玩了\_\_\_\_\_分鐘。

<解析>

設一半旅遊人步行  $x$  公里，則坐車觀光 $(5.5-x)$ 公里，觀光車空駛  $2x$  公里

$$\frac{x}{3} = \frac{5.5-x}{12} + \frac{2x}{18}, x=1.5$$

環形觀光路線用時 $=\left(\frac{1.5}{3} + \frac{5.5-1.5}{12}\right) \times 60 = 50$



2. 九連環是流傳在中國民間的智力玩具，如圖 1，它是由九個環相連成串，以解下九個環為勝。以圖 2 的三連環為例，把一個環卸下或套上手柄為一步，卸下三連環步驟：1 環下，3 環下，1 環上，2 環下，1 環下，共 5 步，可見解九連環要點：每個環被卸下或者套上，有且只有它前面的一個環在手柄上，卸下一環需 1 步，卸下二連環需 2 步，卸下三連環需 5 步，如果把九連環全部卸下，在不出現迴圈的情況下需要\_\_\_\_\_步。

<解析>

$a_1=1, a_2=2, a_3=5$

遞推公式： $a_1=1, a_2=2, a_n=2a_{n-2}+a_{n-1}+1 (n \geq 3)$

得到 1、2、5、10、21、42、85、170、341

所以卸下九連環需要 341 步

