



2023 第十九屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
19th IMC International Mathematics Contest (Singapore)

高中一年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！ ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	A	C	B	D	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$-\frac{3}{2}$	$(2\sqrt{3}, +\infty)$	2	$[\sqrt{2}, \sqrt{10}]$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}+\ln 4$	$\frac{5}{48}$	$-\frac{1}{2}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知集合 $A=\{x|-2\leq x\leq 3\}$ ， $B=\{x|x>0\}$ ，則 $A\cup B=$ ()。
(A) $[-2, 3]$ (B) $(0, 3]$ (C) $(0, +\infty)$ (D) $[-2, +\infty)$

<解析>



依圖解法，得 $[-2, +\infty)$ ，選 D。

2. 已知函數 $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+1$ ，在下列區間中，包含 $f(x)$ 零點的區間是()。
(A) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

<解析>

$$f(\frac{1}{4})=\sqrt{\frac{1}{4}}-4+1<0; f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{2}}-2+1<0; f(1)=\sqrt{1}-1+1>0$$

$f(\frac{1}{2})\times f(1)<0$ ，必存在零點，取值 $(\frac{1}{2}, 1)$ ，選 B。

3. 若 $a>b$ ， $c>d>0$ ，則一定有()。
(A) $ac>bd$ (B) $ac<bd$ (C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ (D) 以上答案都不對

<解析>

當 $a=-1$ ， $b=-2$ ， $c=100$ ， $d=1$ 時， $-100>-2$ (A 錯誤)

當 $a=-1$ ， $b=-2$ ， $c=2$ ， $d=1$ 時， $-2<-2$ (B 錯誤)

當 $a=-1$ ， $b=1$ ， $c=2$ ， $d=1$ 時， $-\frac{1}{2}>1$ (C 錯誤)

選 D。

4. 已知 $a=\log 2$ ， $b=\sin\frac{4\pi}{7}$ ， $c=2^{\frac{1}{3}}$ ，則()。

(A) $a<b<c$ (B) $b<a<c$ (C) $b<c<a$ (D) $a<c<b$

<解析>

$$\log 2<\frac{1}{2}<\sin\frac{4\pi}{7}<1<2^{\frac{1}{3}}$$

故 $a<b<c$ ，選 A。

5. Given the vector (向量) $\overrightarrow{OA}=(\cos \beta, \sin \beta)$, the vector $\overrightarrow{OB}$ is obtained by rotating (旋轉) the vector $\overrightarrow{OA}$ counterclockwise (逆時針) around the origin O by an angle θ (where($0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$)), then which of the following statements is incorrect?

(A) $|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$

(B) $|\overrightarrow{AB}|<\sqrt{2}$

(C) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$

(D) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

<解析>

設 $\overrightarrow{OA}(1, 0)\rightarrow |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$

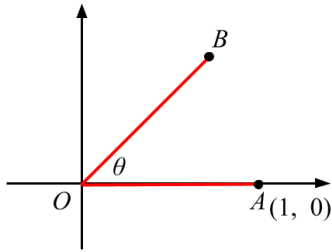
$0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$ ，取 $\theta=60^{\circ}$ ，則 $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $\overrightarrow{OB}=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

(A) $1+1>1$ 成立

(B) $|\overrightarrow{AB}|<\sqrt{2}$ ($\theta<90^{\circ}$)成立

(C) $3\neq 1$

(D) $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})=0$ 成立，選 C。



6. 已知函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，且 $a>b>c$ ， $a+b+c=0$ ，則()。

(A) $\forall x\in(0, 1)$ ，都有 $f(x)>0$

(B) $\forall x\in(0, 1)$ ，都有 $f(x)<0$

(C) $\exists x_0\in(0, 1)$ ，使得 $f(x_0)=0$

(D) $\exists x_0\in(0, 1)$ ，使得 $f(x_0)>0$

<解析>

$a>0>c=f(0)$ 且 $f(1)=a+b+c=0$

得 $f(\frac{c}{a})=0$ ，且 $\frac{c}{a}<0$ ，故 $\forall x\in(\frac{c}{a}, 1)$ 都有 $f(x)<0$ ，選 B。

7. 設 $f(x)$ 是定義在 R 上以 2 為週期的偶函數，且 $x\in(0, 1)$ 時， $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ ，則函數 $f(x)$ 在區間 $(1, 2)$ 上()。

(A) 是增函數且 $f(x)<0$ (B) 是增函數且 $f(x)>0$

(C) 是減函數且 $f(x)<0$ (D) 是減函數且 $f(x)>0$

<解析>

$\forall x\in(1, 2)$ ， $f(x)=f(x-2)=f(2-x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-(2-x))= \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

得知 $f(x)$ 在區間 $(1, 2)$ 是減函數且 $f(x)>0$ ，選 D。

8. 設 $f(x)$ 為 $\mathbf{R}$ 上的奇函數，且在 $(0, +\infty)$ 上單調遞增， $f(1)=0$ ，則不等式 $f(x+1)<0$ 的解集是 (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$

<解析>

$f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 單調遞增， $f(-1)=0$ ， $f(0)=0$

故 $f(x+1)<0$ 等於 $x+1<-1$ 或 $0<x+1<1$ ，選 D。

二、填充題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 若不等式 $x^2+ax+b>0$ 的解集為 $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ ，則 $a+b=$ _____。

<解析>

$$a=-\left(\frac{1}{2}+2\right)=-\frac{5}{2}, b=\frac{1}{2} \times 2=1$$

$$\text{則 } a+b=-\frac{5}{2}+1=-\frac{3}{2}$$

2. 設 $f(x)=x^2-ax+3$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ ，若函數 $f(x)$ 有兩個不相等的正數零點，則 a 的取值範圍為_____。

<解析>

有兩個不等正根 x_1, x_2 ， $\Delta=a^2-12>0$

$$x_1+x_2=a>0$$

$$x_1x_2=3>0$$

$$\text{得 } a>2\sqrt{3}$$

當 $a \in (2\sqrt{3}, +\infty)$ ，函數 $f(x)$ 有兩個不相等的整數零點。

3. 符號函數 $\text{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ ，則函數 $f(x)=\text{sgn}(\ln x)-\ln^2 x$ 的零點個數為_____。

<解析>

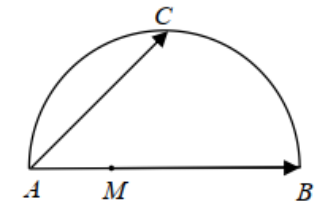
$x>1$ 時， $\ln x>0$ ， $\text{sgn}(\ln x)=1$ ， $\ln^2 x=1$ ，故 $\ln x=1$ ， $x=e$

$x=1$ 時， $\ln x=0$ ， $\text{sgn}(\ln x)=0$ ，得 $f(1)=0$

$0<x<1$ ， $\ln x<0$ ， $\text{sgn}(\ln x)=-1$ ， $f(x)<0$

零點個數為 2

4. As shown in the figure, AB is the diameter, C is the midpoint of $\widehat{AB}$, point M lies on line segment AB . If $AB=2$, then what is the range value (取值範圍) of $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}|$?



<解析>

$\because M$ 為動點，當 M 在 B 點時，有最小值為 $\sqrt{2}$ ；當 M 在 A 點時，有最小值為 $\sqrt{10}$ 故取值範圍 $[\sqrt{2}, \sqrt{10}]$

5. 設函數 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})$ ($\omega>0$)，若 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{4})$ 對任意的實數 x 都成立，則 ω 的最小值為_____。

<解析>

$$\omega \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故 } \omega = 8k + \frac{2}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

6. 若 $f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{2-x}\right|+b$ 是奇函數，則 $a+b=$ _____。

<解析>

f 定義域 D 關於原點對稱，因為 $2 \notin D$ ，所以 $-2 \notin D$

故 $a+\frac{1}{2-(-2)}=0$ ，故 $a=-\frac{1}{4}$ ， $0=f(0)=\ln\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|+b$ ， $b=\ln 4$

$$\text{則 } a+b=-\frac{1}{4}+\ln 4$$

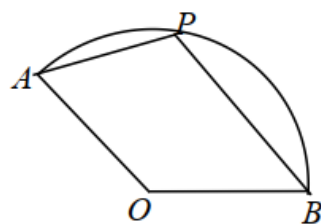
7. 在體育知識有獎問答競賽中，甲、乙、丙三人同時回答一道有關籃球知識的問題，已知甲答題正確率是 $\frac{3}{4}$ ，乙答題錯誤的概率是 $\frac{1}{3}$ ，乙、丙兩人同時答題正確的的概率是 $\frac{1}{4}$ 。假設每人答題正確與否是互相獨立的，那麼甲、丙都答題錯誤，且乙答題正確的的概率為_____。

<解析>

乙答對的概率 $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ，且 $\frac{2}{3} \times \text{丙} = \frac{1}{4}$ ，丙 $=\frac{3}{8}$

$$\text{則 } \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{48}$$

8. As show in the figure, in sector AOB with radius of 1 unit, $\angle AOB=120^\circ$. If P lies on arc AB , then what is the minimum value of $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$?



<解析>

以 O 為坐標原點， OB 所在的直線為 x 軸，垂直於 OB 所在的直線為 y 軸，建立平面直角坐標系

所以 $B(1, 0)$, $A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

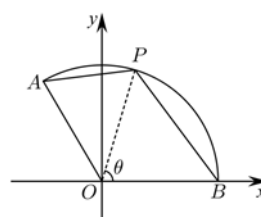
設 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$)

$\therefore \overrightarrow{AP} = (\cos \theta + \frac{1}{2}, \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BP} = (\cos \theta - 1, \sin \theta)$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (\cos \theta + \frac{1}{2})(\cos \theta - 1) + (\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2})\sin \theta = \frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta + \frac{1}{2}\cos \theta) = \frac{1}{2} - \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

$\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$

當 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$, 即 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}$



三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

1. 在 $\triangle ABC$ 中，內角 A 、 B 、 C 所對的邊分別是 a 、 b 、 c ，已知 $b \sin A = \sqrt{3} a \cos B$ 。

(1) 求角 B 的大小；

(2) $c - a = 1$, $b = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

<解析>

(1) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $\sin B \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos B$, $A \in (0, \pi)$, $\sin A > 0$

故 $\sin B = \sqrt{3} \cos B \rightarrow \tan B = \sqrt{3}$, 又 $B \in (0, \pi)$, $B = \frac{\pi}{3}$

(2) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 即 $\frac{a^2 + (a+1)^2 - 7}{2a(a+1)} = \frac{1}{2}$, 得 $a^2 + a - 6 = 0$, $a = 2$, $c = 3$

$\triangle ABC$ 面積 $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. 已知函數 $f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$,

(1) 若 $f(a) = 1$, 求 a 的值；

(2) 判斷函數 $f(x)$ 的奇偶性，並證明你的結論；

(3) 若 $f(x) \geq m$ 對於 $x \in [3, +\infty)$ 恆成立，求實數 m 的範圍。

<解析>

(1) $f(a) = \log_2 \frac{a-1}{a+1} = 1$, 得 $\frac{a-1}{a+1} = 2$, $a = -3$

(2) 函數 $f(x)$ 為奇函數

證明：函數 $f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$, $\frac{x-1}{x+1} > 0$

函數的定義域為 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$

因為 $f(-x) = \log_2 \frac{-x-1}{-x+1} = \log_2 (\frac{x-1}{x+1})^{-1} = -\log_2 \frac{x-1}{x+1} = -f(x)$

$\therefore f(x)$ 為奇函數

(3) $f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1} = \log_2 (1 - \frac{2}{x+1})$

由 $x \in [3, +\infty)$, 得 $x+1 \geq 4$

根據函數 $y = -\frac{2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上單調遞增，得 $-\frac{2}{x+1} \in [-\frac{1}{2}, 0)$

則 $1 - \frac{2}{x+1} \in [-\frac{1}{2}, 1)$

所以 $f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1} \in [-1, 0)$, 即 $f(x)$ 的值域為 $[-1, 0)$

$f(x) \geq m$ 對於 $x \in [3, +\infty)$ 恆成立，得實數 m 的範圍 $(-\infty, -1]$