Examinee 學生資料

Country/國家:________ City/市(省):________ School/學校:________

Name/姓名:________ Sex/性別:________ Instructor/指導老師:________

2023 第十九屆 IMC 國際數學交流活動(新加坡)
19th IMC International Mathematics Contest (Singapore)

高中二年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分　得分:______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	C	C	D	B	B	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	-8	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	[-2, -1)	$[0, \frac{\pi}{6}]$	-16	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$[\frac{2}{3}, +\infty)$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設集合 $A=\{x|\log_2(x-2)<1\}$，$B=\{x|x>3\}$，則 A∩(△B)=(　)。(△B 表示餘集合)
   (A) (2, 4)　(B) (-∞, 3]　(C) (2, 3]　(D) (0, 2)

<解析>

$\log_2(x-2)<1$，$x-2<2$，$x<4$，且 $x-2\geq 0$，$x\geq 2$

$△B=\{x|x\leq 3\}$

故 A∩(△B)= (2, 3]，選 C。

2. If the distance from point M on the parabola (拋物線) $y=\frac{1}{4}x^2$ to the focus point (焦點) is 2 units, what is the distance from point M to y-axis? (A)1 (B)$\frac{3}{2}$ (C)2 (D)$\frac{\sqrt{31}}{2}$

<解析>

$x^2=4cy$，$c=1$，焦點坐標(0, 1)，準線方程式 y=-1

設 $M(x, y)$，y-(-1)=2，y=1，$x^2=4\times 1=4$

M 點到原點的距離為 $|x|=2$

選 C。

3. 函數 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，ω>0 在區間$[a, b]$上是增函數，且 $f(a)=-A$，$f(b)=A$，則函數 $g(x)=A\cos((\omega x+\varphi)$在$[a, b]$上(　)。
   (A)單調遞增 (B)單調遞減 (C)最大值為 A (D)最小值為-A

<解析>

$f(a)= A\sin(\omega a +\varphi) =-A$，$\sin(\omega a +\varphi)=-1$，$(\omega a +\varphi)=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$f(b)= A\sin(\omega b +\varphi) =A$，$\sin(\omega b +\varphi)=1$，$(\omega b +\varphi)=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

故 $\cos((\omega x+\varphi)$，先增後減，最大值=1，最小值=0

乘以正數 A，得 $g(x)$最大值為 A。

選 C。

4. 若圓 $x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$ 截直線 $x-2y+1=0$ 所得弦長為 2，則 a=(　)。
   (A)-1　(B)0　(C)1　(D)2

<解析>

$x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0 \rightarrow (x-1)^2+(y-a)^2=-a^2+a^2+1=1$

圓心$(1, a)$ 半徑=1

截直線通過圓心

$1-2a+1=0$，$a=1$

選 C。

5. 已知$\{a_n\}$為等差數列，$a_1=3$，$a_4+a_6=-10$，若數列$\{b_n\}$滿足 $b_n=2^{a_n}(n=1, 2, ...)$，記$\{b_n\}$的前 n 項積為 T_n，則 T_5=(　)。
   (A)-45　(B)-80　(C)$10\frac{21}{32}$ (D) $\frac{1}{32}$

<解析>

$a_5=\frac{a_4+a_6}{2}=-5$

$T_5=\{b_5\}= b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5 =2^{a_1+...+a_5}=2^{\frac{5}{2}(a_1+a_5)}=2^{-5}=\frac{1}{32}$

選 D。

6. 已知 $2023^a=2035$，$2035^b=2023$，$c=\log_{2050}2023$
   (A)$a^c<b^c$　(B)$c^a<c^b$　(C)$\log_a c>\log_b c$ (D) $\log_c a>\log_c b$

<解析>

$2023^a=2035 \rightarrow \log 2023^a=\log 2035$，$a\log 2023=\log 2035$，$a=\frac{\log 2035}{\log 2023}>1$

$2035^b=2023 \rightarrow \log 2035^b=\log 2023$，$b\log 2035=\log 2023$，$b=\frac{\log 2023}{\log 2025}<1$，且 $b=\frac{1}{a}$

$c=\log_{2050}2023 \rightarrow c=\frac{\log 2023}{\log 2050}<1$，得 $a>1>b>c>0$

(A)$4^2 > 4^{\frac{1}{2}}$，$a^c<b^c$(不合)

(B)$\left(\frac{1}{4}\right)^2<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$c^a<c^b$(合理)

(C)$\log_2(\frac{1}{4})<\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4})$，$\log_a c>\log_b c$(不合)

(D) $\log_{\frac{1}{4}}2<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$，$\log_c a>\log_c b$(不合)

選 B。

新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)

7. 在平面直角坐標 xOy 中，已知 P 是圓 C:$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上的動點，若 $A(-a, 0)$，$B(a, 0)$，$a\neq 0$，則$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$的最大值為( )。(A)16 (B)12 (C)8 (D)6

<解析>

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|2\overrightarrow{PO}|\leq 2(|\overrightarrow{PC}|+|\overrightarrow{CO}|)=2(1+5)=12$

選 B。

8. 已知雙曲線 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0$，$b>0)$的左、右頂點分別為 A_1、A_2，左、右焦點分別為 F_1、F_2，以線段 A_1A_2 為直徑的圓與雙曲線 C 的一條漸進線在第一象限的交點為 M，A_2M 與另一條漸進線平行，若$|F_1M|=\sqrt{21}$，則$\triangle MA_2F_2$的面積是( )。

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

<解析>

$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ y=-\frac{b}{a}(x-a) \end{cases} \rightarrow M(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \rightarrow b^2=3a^2$，$c=2a$，$a^2=3$

$S=\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times(c-a)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，選 C。

二、填充題（每小題 5 分，共 40 分）

1. 在$(x-\frac{2}{x})^4$的展開式中，x^2的係數是_______。

<解析>

x^2 的係數$=C^4_1(-2)=-8$

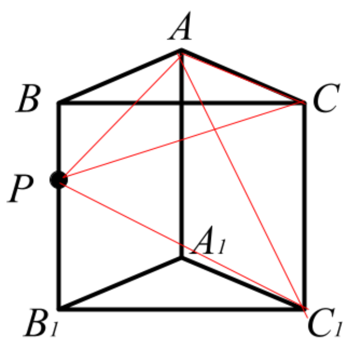
2. In the regular triangle prism (正三角柱) ABC-$A_1B_1C_1$, P is a point lies on the edge BB_1 and $AB=AA_1=2$. What is the volume of the triangular prism C_1-PAC?

<解析>

將 P 移動到 B 點，高度不變，形成 C_1-ACB 的三角錐

正三角柱體積$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 2=2\sqrt{3}$

則 C_1-ACB 三角錐體積$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



3. 設 O 為原點，雙曲線 C: $x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右焦點為 F，P 點在 C 的左支上，則$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$的取值範圍是_________。

<解析>

$|\overrightarrow{OF}|=c=\sqrt{1+3}=2$，令$<\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OF}>=\theta$，則 $\theta\in(\frac{2}{3}\pi, \pi]$

$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}=|\overrightarrow{OF}|\cos\theta=2\cos\theta\in[-2, -1)$

4. 已知點 $A(2, 0)$、$B(1, 2)$、$C(2, 2)$，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，$O$ 為座標原點，則$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OA}$夾角的取值範圍是_________。

<解析>

$A(2, 0)$、$B(1, 2)$、$C(2, 2)$，則$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(1, 0)$

則$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=1$，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，$|\overrightarrow{AP}|=1$，

P 是以 A 為圓心，半徑為 1 的圓

$\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OA}$夾角最大為$\frac{\pi}{6}$

$\therefore\overrightarrow{OP}$與$\overrightarrow{OA}$夾角的取值範圍是$[0, \frac{\pi}{6}]$

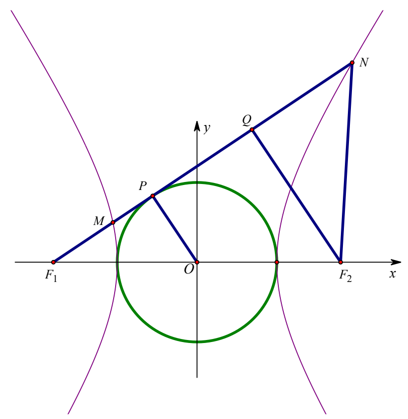
5. 已知$(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，則 $a_1+a_3+a_5=$_________。

<解析>

$(1-x)^5=1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$，$a_1+a_3+a_5=-16$

6. 雙曲線 C 的兩個焦點為 F_1、F_2，以 C 的實軸為直徑的圓記為 D，過 F1 作 D 的切線與 C 的兩支交於 M、N 兩點，且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$，則 C 的離心率為_________。

<解析>



作 $F_2Q\perp MN$，垂足為 Q，設切點為 P，

則$|OF_1|=c$，$|OP|=a$，$|PF_1|=b$，$|QF_1|=2b$，$|QF_2|=2a$

在 $RT\triangle NQF_2$ 中，$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$

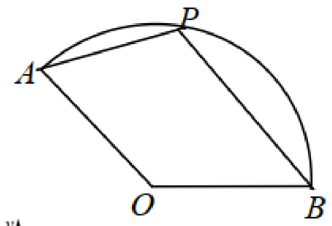
$|NQ|=\frac{3}{2}a$，$|NF_2|=\frac{5}{2}a$

則$(2b+\frac{3}{2}a)-\frac{5}{2}a=2a$

$\therefore b=\frac{3}{2}a$，$e=\frac{\sqrt{13}}{2}$

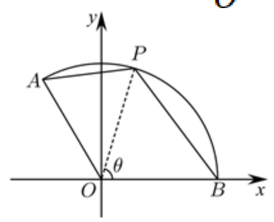
新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)

7. As show in the figure, in sector AOB with radius of 1 unit, $\angle AOB=120^\circ$. If P lies on arc AB, then what is the minimum value of $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$?



<解析>

以 O 為坐標原點，OB 所在的直線為 x 軸，垂直於 OB 所在的直線為 y 軸，建立平面直角坐標系



所以 $B(1, 0)$，$A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

設 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0\le\theta\le\frac{2}{3}\pi)$

$\therefore \overrightarrow{AP}=(\cos\theta+\frac{1}{2}, \sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BP}=(\cos\theta-1, \sin\theta)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\cos\theta+\frac{1}{2})(\cos\theta-1)+(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\theta=\frac{1}{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)=\frac{1}{2}-\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$

$\because 0\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$ $\therefore \frac{\pi}{6}\le\theta+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$

當 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{2}$

8. 若非空實數集 X 中存在最大元素 M 和最小元素 m，則記$\triangle(X)=M-m$，設 $a>0$，函數 $f(x)=\log_2(\frac{1}{x}+a)$在區間$[t, t+1]$上值域記為 Y，若對任意 $t\in[\frac{1}{2}, 1]$，函數都滿足$\triangle(Y)\le1$，則 a 的取值範圍為______。

<解析>

$a>0$ 且 $t>0$ 時，$f(x)=\log_2(\frac{1}{x}+a)$，在區間$[t, t+1]$遞減

所以$\triangle(Y)=f(t)-f(t+1)\le1$，$t\in[\frac{1}{2}, 1]$恆成立

則$\log_2(\frac{1}{t}+a)-\log_2(\frac{1}{t+1}+a)\le1$

$\Rightarrow \log_2(\frac{1}{t}+a)\le1+\log_2(\frac{1}{t+1}+a)$

$\Rightarrow \frac{1}{t}+a\le2(\frac{1}{t+1}+a)$，$a\ge\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}$，$t\in[\frac{1}{2}, 1]$恆成立

記$g(t)=\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}$，$t\in[\frac{1}{2}, 1]$

$g'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{2t^2-(t+1)^2}{t^2(t+1)^2}=\frac{t^2-2t-1}{t^2(t+1)^2}$，$t^2-2t-1<0$

故$g'(t)<0$，最大值為$g(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$，$a$ 的取值範圍$[\frac{2}{3}, +\infty)$

三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

1. 已知正方體 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱長為 1，P 是空間中一點，

(1)若點 P 線上段 AD_1 上運動，求三棱錐 $D\text{-}BPC_1$ 的體積；

(2)若點 P 線上段 AA_1 上運動，則求過 P、B、D_1 三點的正方體截面面積的最小值；

(3)若點 P 線上段 A_1B 上運動，則求 $AP+PD_1$ 的最小值。

<解析>

（1）$V_{D\text{-}BPC_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta BPC_1}h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{6}$

（2）截面為平行四邊形，且截面面積等於$2S_{\Delta PBD_1}$。M、O 為AA_1、BD_1中點，可證MO為AA_1、BD_1的公垂線段，且 $MO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故$2S_{\Delta PBD_1}=BD_1\times MO=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

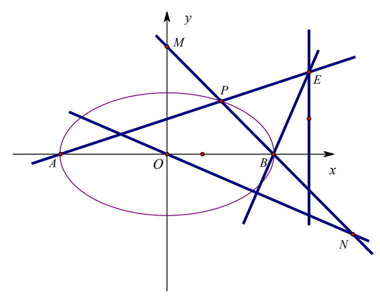
（3）把ΔABA_1、ΔA_1BD_1展成平面，由兩點間線段最短可得所求為$\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2. 橢圓 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的離心率為$\frac{\sqrt{6}}{3}$，其長軸的兩個端點分別為 $A(-3, 0)$、$B(3, 0)$，

(1)求橢圓 C 的標準方程；

(2)點 P 為橢圓上除 A、B 外任意一點，直線 AP 交直線 $x=4$ 於點 E，點 O 為座標原點，過點 O 且與直線 BE 垂直的直線記為 l，直線 BP 交 y 軸於點 M，交直線 l 於點 N，求$\triangle BMO$與$\triangle NMO$的面積之比。

<解析>



(1)由題意，得$a=3$. 又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $c=\sqrt{6}$.

又因為$a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{3}$.

故橢圓C的方程為$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)設$P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm3,y_0\neq0)$，則$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$

所以直線AP的方程為$y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，

令$x=4$，得點E的座標為$(4,\frac{7y_0}{x_0+3})$

因為直線BE的斜率為$\frac{\frac{7y_0}{x_0+3}}{4-3}=\frac{7y_0}{x_0+3}$，

所以直線l的方程為$y=-\frac{x_0+3}{7y_0}x$，

又因為直線PB的方程為$y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$

聯立直線l和直線PB的方程，消去y得$-\frac{x_0+3}{7y_0}x=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，

所以$\frac{7y_0^2+x_0^2-9}{7y_0(x_0-3)}x=\frac{3y_0}{x_0-3}$，

因為$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1$，所以$x_0^2-9=-3y_0^2$，

所以$\frac{4y_0^2}{7y_0(x_0-3)}x=\frac{3y_0}{x_0-3}$，解得點$N$的橫坐標$x_N=\frac{21}{4}$

所以$\frac{S_{\triangle BMO}}{S_{\triangle NMO}}=\frac{\frac{1}{2}|OM|\cdot|x_B|}{\frac{1}{2}|OM|\cdot|x_N|}=\frac{|x_B|}{|x_N|}=\frac{3}{\frac{21}{4}}=\frac{4}{7}$，即$\triangle BMO$與$\triangle NMO$的面積之比為4: 7.

新加坡 決賽 11 年級
Singapore Final (Grade 11)