

高中二年級(決賽)試題

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分 得分:_____

◎ 參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
 ◎ 計算題需要在試題空白處列出運算過程；只寫答案沒有運算過程不予計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

- 設集合 $A=\{x|\log_2(x-2)<1\}$ ， $B=\{x|x>3\}$ ，則 $A\cap(\triangle B)=$ ()。(△B 表示餘集合)
 (A) (2, 4) (B) $(-\infty, 3]$ (C) (2, 3] (D) (0, 2)
- If the distance from point M on the parabola (拋物線) $y=\frac{1}{4}x^2$ to the focus point (焦點) is 2 units, what is the distance from point M to y -axis? (A)1 (B) $\frac{3}{2}$ (C)2 (D) $\frac{\sqrt{31}}{2}$
- 函數 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ ， $\omega>0$ 在區間 $[a, b]$ 上是增函數，且 $f(a)=-A$ ， $f(b)=A$ ，則函數 $g(x)=A\cos((\omega x+\varphi))$ 在 $[a, b]$ 上()。
 (A) 單調遞增 (B) 單調遞減 (C) 最大值為 A (D) 最小值為 $-A$
- 若圓 $x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$ 截直線 $x-2y+1=0$ 所得弦長為 2，則 $a=($)。
 (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2
- 已知 $\{a_n\}$ 為等差數列， $a_1=3$ ， $a_4+a_6=-10$ ，若數列 $\{b_n\}$ 滿足 $b_n=2^{a_n}(n=1, 2, \dots)$ ，記 $\{b_n\}$ 的前 n 項積為 T_n ，則 $T_5=($)。
 (A)-45 (B)-80 (C) $10\frac{21}{32}$ (D) $\frac{1}{32}$

- 已知 $2023^a=2035$ ， $2035^b=2023$ ， $c=\log_{2050}2023$
 (A) $a^c<b^c$ (B) $c^a<c^b$ (C) $\log_a c>\log_b c$ (D) $\log_c a>\log_c b$

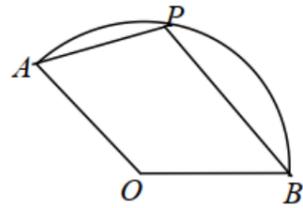
- 在平面直角坐標 xOy 中，已知 P 是圓 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上的動點，若 $A(-a, 0)$ ， $B(a, 0)$ ， $a\neq 0$ ，則 $|\vec{PA}+\vec{PB}|$ 的最大值為()。(A)16 (B)12 (C)8 (D)6

- 已知雙曲線 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的左、右頂點分別為 A_1, A_2 ，左、右焦點分別為 F_1, F_2 ，以線段 A_1A_2 為直徑的圓與雙曲線 C 的一條漸進線在第一象限的交點為 M ， A_2M 與另一條漸進線平行，若 $|F_1M|=\sqrt{21}$ ，則 $\triangle MA_2F_2$ 的面積是()。
 (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

二、填充題 (每小題 5 分，共 40 分)

- 在 $(x-\frac{2}{x})^4$ 的展開式中， x^2 的係數是_____。
- In the regular triangle prism (正三角柱) $ABC-A_1B_1C_1$, P is a point lies on the edge BB_1 and $AB=AA_1=2$. What is the volume of the triangular prism C_1-PAC ?
- 設 O 為原點，雙曲線 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦點為 F ， P 點在 C 的左支上，則 $\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OF}}{|\vec{OP}|}$ 的取值範圍是_____。
- 已知點 $A(2, 0)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(2, 2)$ ， $|\vec{AP}|=|\vec{AB}-\vec{AC}|$ ， O 為座標原點，則 \vec{OP} 與 \vec{OA} 夾角的取值範圍是_____。
- 已知 $(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ ，則 $a_1+a_3+a_5=$ _____。
- 雙曲線 C 的兩個焦點為 F_1, F_2 ，以 C 的實軸為直徑的圓記為 D ，過 F_1 作 D 的切線與 C 的兩支交於 M, N 兩點，且 $\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$ ，則 C 的離心率為_____。

7. As show in the figure, in sector AOB with radius of 1 unit, $\angle AOB=120^\circ$. If P lies on arc AB , then what is the minimum value of $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$?



8. 若非空實數集 X 中存在最大元素 M 和最小元素 m ，則記 $\Delta(X)=M-m$ ，設 $a>0$ ，函數 $f(x)=\log_2(\frac{1}{x}+a)$ 在區間 $[t, t+1]$ 上值域記為 Y ，若對任意 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ ，函數都滿足 $\Delta(Y) \leq 1$ ，則 a 的取值範圍為_____。

2. 橢圓 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的離心率為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，其長軸的兩個端點分別為 $A(-3, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，
 (1) 求橢圓 C 的標準方程；
 (2) 點 P 為橢圓上除 A 、 B 外任意一點，直線 AP 交直線 $x=4$ 於點 E ，點 O 為座標原點，過點 O 且與直線 BE 垂直的直線記為 l ，直線 BP 交 y 軸於點 M ，交直線 l 於點 N ，求 $\triangle BMO$ 與 $\triangle NMO$ 的面積之比。

三、計算題（每小題 10 分，共 20 分，請寫出簡要過程，可得過程分）

1. 已知正方體 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱長為 1， P 是空間中一點，
 (1) 若點 P 線上段 AD_1 上運動，求三棱錐 $D-BPC_1$ 的體積；
 (2) 若點 P 線上段 AA_1 上運動，則求過 P 、 B 、 D_1 三點的正方體截面面積的最小值；
 (3) 若點 P 線上段 A_1B 上運動，則求 $AP+PD_1$ 的最小值。