2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

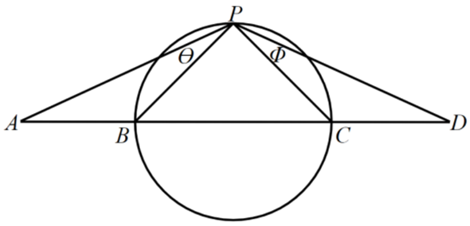
《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

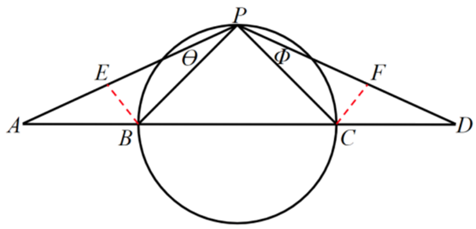
(B)1. 設直線 $\overline{AD}$ 上三等分點為B、C，以 $\overline{BC}$ 為直徑之圓周上取一點P(如圖)，若 $\angle APB=\theta$，$\angle CPD=\phi$，則 $\tan\theta\cdot\tan\phi$ 之值為何?(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{1}{8}$ (D)$\frac{1}{16}$



<解析>

過 B 作 $\overline{BE}//\overline{CP}$，過 C 作 $\overline{CF}//\overline{BP}$

$\because \angle BPC=90^\circ \Rightarrow \angle EBP=\angle FCP=90^\circ$



又 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD} \Rightarrow \overline{BE}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}$ 且 $\overline{CF}=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}$

$\therefore \tan\theta\cdot\tan\phi=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BP}}\cdot\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CP}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}}{\overline{BP}}=\dfrac{1}{4}$

(C)2. 試求 $5^6-4\times5^5-3\times5^4-8\times5^3-40\times5-35=?$
(A)10 (B)-10 (C)15 (D)-15

<解析>

令 $f(x)=x^6-4x^5-3x^4-8x^3-40x-35$

$\because f(x)=(x-5)Q(x)+r$

所求函數值 $f(5)$ 即為

$f(x)$ 除以 $(x-5)$，所得的餘式 r

由綜合除法

1	-4	-3	-8	+0	-40	-35	
	+5	+5	+10	+10	+50	+50	5
1	+1	+2	+2	+10	+10	+15	

∴餘式 r=15，所求之值為 15

(C)3.對於四面體的四個側面三角形，以下說法正確的是( ).

(A)至多有兩個直角三角形

(B)至多有三個直角三角形

(C)至多有四個直角三角形

(D)至少有一個直角三角形

<解析>

(C) 至多有四個直角三角形

(A)4. 設 P、A、B、C 共平面且 $\overline{PA}+3\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{BC}$，若△$CAP$ 之面積為 20，則△ABC 之面積為多少? (A)25 (B)30 (C)40 (D)50

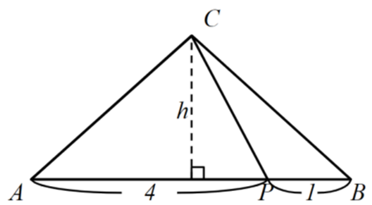
<解析>

$\because \overline{PA}+3\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{BC}$ $\therefore \overline{PA}+3\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{BP}+\overline{PC}$

➔ $\overline{PA}+3\overline{PB}=\overline{BP}$

➔ $\overline{PA}=\overline{BP}-3\overline{PB}$

➔ $\overline{PA}=4\overline{BP}$，$\therefore A$、$P$、$B$ 共線且 $\overline{PA}$ ：$\overline{PB}$=4：1

➔ 

故△ABC 面積=$\frac{5}{4}$△CAP 面積=$\frac{5}{4}\times 20=25$。

(C)5. 已知數列$\{a_n\}$滿足：$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，$a_1=2$，$a_2=2018$，S_n表示$\{a_n\}$的前n項和，則S_{2018}為

( ).(A)2018 (B)2019 (C)2020 (D)2021

<解析>

$a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n-a_{n+1}=-a_n$

$\therefore a_{n+6}=-a_{n+3}=a_n$

$\therefore S_{2018}=a_1+a_2+(a_3+.......+a_8)+........+(a_{2013}+.......+a_{2018})$

$=a_1+a_2=2020$

(D)6. $f(x)$為定義域為R上的週期為 3 的奇函數，且$f(2)=0$，則$f(x)$在區間（-6, 6）的零點至少有多少個? (A)9 (B)11 (C)13 (D)15

<解析>

由 $f(0)=0$ ➔ $f(\pm 3)=0$

由 $f(2)=0$ ➔ $f(5)=f(-1)=f(-4)=0$

由 $f(2)=0$ ➔ $f(-2)=0$ ➔ $f(-5)=f(1)=f(4)=0$

又 $f(1.5)=f(-1.5)$ 且 $f(1.5)=-f(1.5)$

$\therefore f(1.5)=0$

$\therefore f(4.5)=f(-4.5)=0$

至少共有 15 个零点。

.

(B)7. Let n! = 1 × 2 × 3 × ··· × n, [x] is the largest integer not exceeding x, then what is the integral solutions of the equation $\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{10!}\right]=3466$

(A)2018 (B)2019 (C)2020 (D)2021

翻譯：記 $n!=1\times2\times3\times\ldots\times n$，$[x]$ 表示不超過 x 的最大整數。

則方程 $\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{10!}\right]=3466$ 的整數解為（　　）。

(A)2018 (B)2019 (C)2020 (D)2021

<解析>

$x=2018$ 時，方程式左邊 $=2018+1009+336+84+16+2=3465$

$x=2019$ 時，方程式左邊 $=2019+1009+336+84+16+2=3466$，選 B。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. △ABC 中，$\angle B=55°$，$\angle C=65°$，$\overline{BC}=10$，則△ABC 的外接圓面積為 ① 。

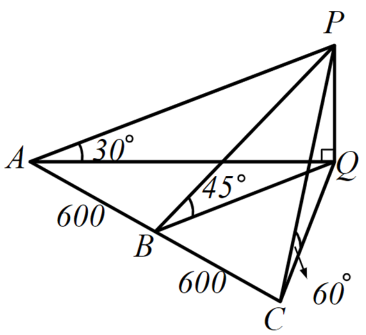
<解析>

$\angle A=180°-\angle B-\angle C=60°$，$2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{10}{\sin 60°}=\dfrac{20}{\sqrt{3}}$

$\therefore R=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$

$\therefore$外接圓的面積為 $\pi\cdot R^2=\dfrac{100}{3}\pi$

2. 在共線的 A、B、C 三點，測得不在同一線上之遠處高山山頂，其仰角分別為30°、45°及60°，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=600$ 公尺，則山的高度為 ② 公尺。

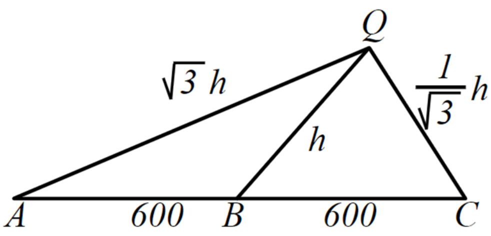


<解析>

設山的高度 $\overline{PQ}=h$ 公尺 ➔ $\overline{AQ}=\sqrt{3}h$，$\overline{BQ}=h$，$\overline{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

如圖

分別在△ABQ 及△ACQ 中，考慮餘弦定理



$$\cos A=\frac{600^2+(\sqrt{3}h)^2-h^2}{2\cdot600\cdot\sqrt{3}h}=\frac{1200^2+(\sqrt{3}h)^2-(\frac{1}{\sqrt{3}}h)^2}{2\cdot1200\cdot\sqrt{3}h}$$

➔ $h=\pm300\sqrt{6}$ (取正) $\therefore$山的高度為 $300\sqrt{6}$ 公尺

3. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，且 $0\le\theta\le\pi$，則 $\sin\theta-\cos\theta$ = ③

〈解析〉

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ ➔ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$

➔ $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$ ➔ $-2\sin\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$

➔ $1\text{-}2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$ ➔ $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{49}{25}$

$\because \sin\theta\cos\theta<0$ 且 $0\le\theta\le\pi$，故 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$

4. $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x-2}$，$(x>2)$ 的值域為__④__.

〈解析〉

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{x-2},\quad \frac{1}{f(x)}=\frac{x-1-1}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2\frac{1}{x-1}+2-\frac{2}{x-1}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

$$\therefore f(x)\geqslant\frac{27}{4}$$

$f(x)\in\left[\frac{27}{4},+\infty\right)$

5. 已知函數 $f(x)=\lg\left(5^x+\frac{4}{5^x}+m\right)$ 的值域為 R，則 m 的取值範圍是__⑤__.

〈解析〉

設 $t=5^x+\frac{4}{5^x}$，則 $t\ge2\sqrt{5^x\cdot\frac{4}{5^x}}=4$

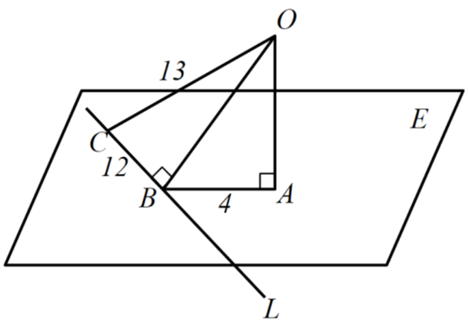
$\because f(x)$ 的值域為 R

故 $t+m$ 取所有正實數

$\therefore m\le-4$

6. 設空間中有一點 O 在 E 平面的投影為 A，A 在平面 E 上一直線 L 之投影為 B，而 L 上另有一點 C。若 $\overline{BC}=12$，$\overline{OC}=13$，$\overline{AB}=4$，則 $\overline{OA}=$__⑥__。

〈解析〉



(1)如圖所示，由三垂線定理可知 $\overline{OB}\perp$ 直線 $\overline{BC}$

$\therefore\triangle$OBC 為直角三角形 $\because\overline{OC}=13$，$\overline{BC}=12$

$\therefore\overline{OB}=5$

(2) $\overline{OA}$ 垂直平面 E

$\therefore\triangle$OAB 為直角三角形

而 $\overline{OB}=5$，$\overline{AB}=4$ $\therefore\overline{OA}=3$

7. 設 x、$y\in R$ 且 $x+2y=4$，則 3^x+9^y 的最小值為 ___⑦___。

<解析>

$3^x+9^y=3^x+3^{2y}$ ➔ $\dfrac{3^x+3^{2y}}{2}\geq\sqrt{3^x\times3^{2y}}=\sqrt{3^{x+2y}}=\sqrt{3^4}=9$，

$\therefore 3^x+9^y$ 之最小值為 18

8. It is known that for any x_1, x_2, $\cdots$, $x_{2018}\in[0, 4]$, the equation $\sum_{i=1}^{2018}|x\text{-}x_i|=2018a$ has at least one real root on [0, 4], what are the possible values of a?

<解析>

$\sum_{i=1}^{2018}|x\text{-}x_i|=2018a$，$f(0)=\sum_{i=1}^{2018}x_i-2018a$

$f(4)=\sum_{i=1}^{2018}4-4\sum_{i=1}^{2018}x_i-2018a$

$\therefore f(0)+f(4)=\sum_{i=1}^{2018}4-4036a=2\times2\times2018-4036a=4036(2-a)$

$\because a=2$ 時，$f(0)+f(4)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上至少有一個實根。

$\therefore a=2$

三、計算題(共 32 分）※未寫計算過程不予計分

1. Determine the minimum value of $f(x, y)=x^2+y^2+xy-2018(x+y)$.

翻譯: 求 $f(x,y)=x^2+y^2+xy-2018(x+y)$ 的最小值。(10 分)

<解析>

$$f(x,y)=x^2+y^2+xy-2018(x+y)$$
$$=\left(x-\frac{2018-y}{2}\right)^2+y^2-2018y-\frac{(2018-y)^2}{4}$$
$$\geqslant y^2-2018y-\frac{(2018-y)^2}{4}=\frac{4y^2-4\times2018y-y^2=2\times2018y-2018^2}{4}$$
$$=\frac{3y^2-2\times2018y-2018^2}{4}$$
$$=\frac{3\left(y-\frac{1}{3}\times2018\right)^2-2018^2-\frac{1}{3}\times2018^2}{4}$$
$$\geqslant-\frac{1}{3}\times2018^2$$

當且僅當$\begin{cases} x=\dfrac{2018-y}{2} \\ y=\dfrac{2018}{3} \end{cases}$既$x=y=\dfrac{2018}{3}$时

$f(x,y)_{\min}=-\dfrac{2018^2}{3}$

2. 設x、y、z、a、b、c均為實數，若$x^2+y^2+z^2=4$，$a^2+b^2+c^2=9$，則行列式$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & c \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$之最大值為何?(10 分)

<解析>

令$\overrightarrow{\alpha}=(x，y，z)$，$\overrightarrow{\beta}=(a，-b，c)$，$\overrightarrow{\gamma}=(-2，1，-3)$

當行列式$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & c \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$最大值時，

$\overrightarrow{\alpha}$，$\overrightarrow{\beta}$與$\overrightarrow{\gamma}$兩兩垂直

$\therefore \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & c \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$的最大值$=|\overrightarrow{\alpha}|\cdot|\overrightarrow{\beta}|\cdot|\overrightarrow{\gamma}|=2\times3\times\sqrt{14}=6\sqrt{14}$

3. 設對所有的實數x，皆使$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$成立，試求實數 k 之範圍。(12 分)

<解析>

$\because \forall x\in R$皆使$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$

$\therefore 2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$ ($\because 4x^2+6x+3$恆正)

$\therefore 2x^2+(6-2k)x+3-k>0$

$(6-2k)^2-4\cdot2\cdot(3-k)<0$

$\Rightarrow 36-24k+4k^2-24+8k<0$

$\Rightarrow 4k^2-16k+12<0$

$\Rightarrow k^2-4k+3<0$

$\Rightarrow (k-3)(k-1)<0$

$\therefore 1<k<3$，即k的範圍為$1<k<3$