

2019 第十五屆  國際數學競賽複賽(台灣)  
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國  
中  
一  
年  
級  
試  
卷

考試時間：90 分鐘 卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

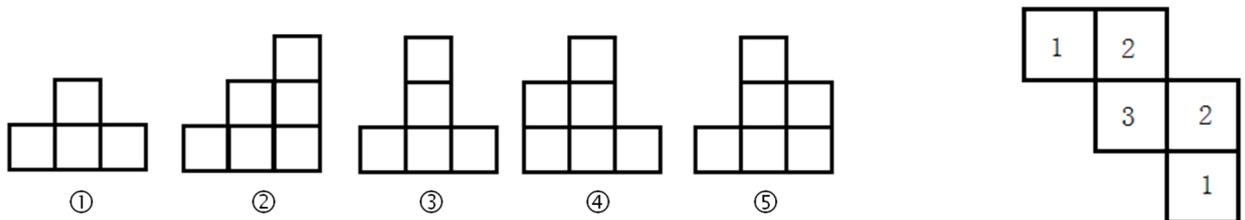
# 2019 第十五屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

## 一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

( D ) 1. 由一些大小相同小正方體搭成的幾何體俯視圖如右圖所示，其中正方形中的數字表示該位置上小正方體的個數，那麼下列各圖中表示該幾何體的主視圖、左視圖依次是\_\_\_\_\_。(A)①③ (B)⑤③ (C)②④ (D)⑤④



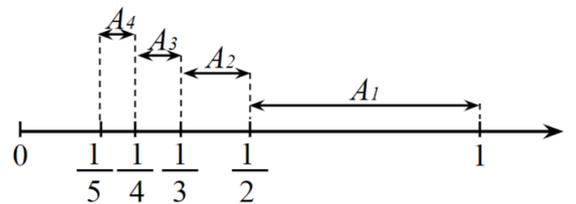
<解析>

依序為⑤④，選 D。

( D ) 2. 如圖，數線上  $A_1$  表示 1 與  $\frac{1}{2}$  的距離， $A_2$  表示  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{1}{3}$  的距離，其餘以此類推，則  $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{10} = ?$  (A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{11}{10}$  (C)  $\frac{1}{11}$  (D)  $\frac{10}{11}$

<解析>

$$\text{原式} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{10} - \frac{1}{11}) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$



( A ) 3. 計算： $\frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7 \times 11} + \frac{1}{7 \times 11 \times 13} =$  \_\_\_\_\_.

(A)  $\frac{93}{2002}$  (B)  $\frac{91}{1992}$  (C)  $\frac{95}{2012}$  (D)  $\frac{89}{2002}$

<解析>

$$\text{原式} = \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \frac{1}{385} + \frac{1}{1001} = \frac{3}{70} + \frac{1}{385} + \frac{1}{1001} = \frac{35}{770} + \frac{1}{1001} = \frac{1}{22} + \frac{1}{1001} = \frac{91+2}{2002} = \frac{93}{2002}$$

- ( C )4. 小傑在數線上原點的位置玩丟擲骰子遊戲，如果丟出的點數是奇數，則小傑向左移動 4 單位長；如果丟出的點數是偶數，則小傑向右移動 3 單位長。若他一共丟了 10 次骰子，其中出現偶數 6 次，則小傑最後位置在數線上的哪裡？(A)-2 (B)1 (C)2 (D)15

<解析>

丟 10 次骰子 → 6 次偶數，4 次奇數

$$6 \times 3 + 4 \times (-4) = 18 - 16 = 2$$

- ( B )5. 數學課，冠蓉在黑板上寫下：

12:12、24、36、48、60、72、.....

18:18、36、54、72、90、.....

如果冠蓉繼續圈下去，在 100 到 370 之間的整數中，共有多少個數被圈起來？

(A)7 個 (B)8 個 (C)9 個 (D)10 個

<解析>

得知求  $[12, 18] = 36$

36 的倍數 = 36、72、108、144、180、216、252、288、324、360，共 8 個數

- ( A )6. 已知  $\sqrt{201.9} = 14.2092$ ， $\sqrt{20.19} = 4.4933$ ，則  $\sqrt{2019} + \sqrt{2.019} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（結果保留小數點後兩位）(A)46.35 (B)46.53 (C)45.35 (D)46.53

<解析>

$$\sqrt{201.9} = \sqrt{2.019 \times 100} = 10 \times \sqrt{2.019}$$

$$\sqrt{20.19} = \sqrt{\frac{2019}{100}} = \frac{\sqrt{2019}}{10}$$

$$\rightarrow \sqrt{2019} + \sqrt{2.019} = 10 \times 4.4933 + 14.2092 \div 10 = 44.933 + 1.42092 = 46.35392 \approx 46.35$$

- ( A )7. The scores of this examination, the mathematics pass is  $\frac{3}{8}$  of the class. The English pass is  $\frac{2}{3}$  of the class. The two subjects all qualified are  $\frac{1}{3}$  of the class. How many people in class which has 48 people can pass one subject at least? (A) 34 (B) 32 (C) 30 (D) 28

翻譯：這次段考成績，數學及格的占全班的  $\frac{3}{8}$ ，英語及格的占全班的  $\frac{2}{3}$ ，兩科都及格的占全班的  $\frac{1}{3}$ ，全班 48 人，則至少一科及格的有幾人？(A)34 (B)32 (C)30 (D)28

<解析>

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{3} = \frac{9}{24} + \frac{16}{24} = \frac{25}{24}$$

$$\frac{25}{24} - \frac{1}{3} = \frac{25-8}{24} = \frac{17}{24}$$

$$48 \times \frac{17}{24} = 34$$

## 二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知  $x$ 、 $y$  滿足  $x^2 + y^2 + \frac{5}{4} = y - 2x$ ，則代數式  $\frac{3xy}{x-2y}$  的值為 ①。

<解析>

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ 或 } y = \frac{1}{2} \text{ 代入}$$

$$\rightarrow \frac{3xy}{x-2y} = \frac{3 \times (-1) \times \frac{1}{2}}{-1 - 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

2. 已知數線上的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點所對應的數分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，且滿足  $a < b < c$ ， $abc < 0$  和  $a + b + c = 0$ ，若記  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  的中點為  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，則這三點中離原點最近的是 ②。

<解析>

$$\text{令 } a = -4, b = 1, c = 3$$

$$\text{滿足 } a < b < c, abc < 0, a + b + c = 0$$

$$\text{則 } (D, E, F) = (-\frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2}) \rightarrow F \text{ 點離原點較近}$$

3. 已知 3 月份某市工作日電動車對尾號限行規定如下：

限行日	週一	週二	週三	週四	週五
限行尾號	1 和 6	2 和 7	3 和 8	4 和 9	5 和 0

為了適應單雙號限行時期（即尾號為單數的只能在單數日行駛，尾號為雙數的只能在雙數日行駛）的需求，某單位購入了兩輛車，則為了保證任何時刻（無論尾號限行還是奇偶限行）都至少有一輛車可以用，兩輛車的尾號可以有 ③ 種可選的方案（不區分車輛，即 1、2 和 2、1 算同一種方案）。

<解析>

考慮限行日，若購買尾號是單數的電動車 = 1, 3, 5, 7, 9

再考慮限行尾號是雙號的電動車 = 2, 4, 6, 8, 0

$$\text{可選方案} = 5 \times 4 = 20$$

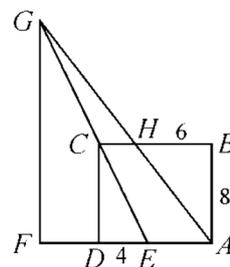
4. 設「 $a \oplus b$ 」代表大於  $a$  且小於  $b$  所有質數的個數。例如：大於 10 且小於 15 的質數有 11、13 兩個質數，所以  $10 \oplus 15 = 2$ 。若  $30 \oplus c = 2$ ，則  $c$  可能為 ④。(全對才給分)

<解析>

比 30 大的質數 = 31、37、41、.....，只能有 2 個質數

所以  $c = 38、39、40、41$

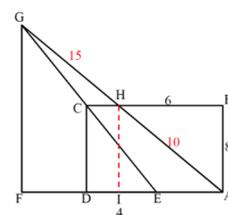
5. 在長方形 ABCD 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 9$ ，H 在  $\overline{BC}$  上， $\overline{BH} = 6$ ，E 在  $\overline{AD}$  上， $\overline{DE} = 4$ ，直線  $\overline{CE}$  與直線  $\overline{AH}$  相交於 G，過 G 作  $\overline{GF} \perp \overline{AD}$  交  $\overline{AD}$  的延長線於 F，則  $\overline{GF}$  的長度為 ⑤。



<解析>

$$\overline{AH} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \frac{\overline{CH}}{\overline{AE}} = \frac{9-6}{9-4} = \frac{3}{5}, \quad \because \overline{CH} \parallel \overline{AE} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{GH} + 10}, \quad \overline{GH} = 15$$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = \frac{10}{10+15} = \frac{2}{5} = \frac{\overline{HI}}{\overline{GF}} = \frac{8}{\overline{GF}}, \quad \overline{GF} = 20$$



6. 計算  $\left| 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{11} - \frac{1}{24857} \right| - \left| \frac{1}{24857} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} - 1 \right| =$  ⑥。

<解析>

$$\text{原式} = \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{11} - \frac{1}{24857} \right) + \left( \frac{1}{24857} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

7. 小佑原有若干元，先用去原有錢數的  $\frac{1}{3}$ ，買了一本試題本，再用剩下錢數的  $\frac{1}{4}$ ，買了一支八折優惠的立可帶，最後剩下 300 元，則立可帶原價是 ⑦ 元。

<解析>

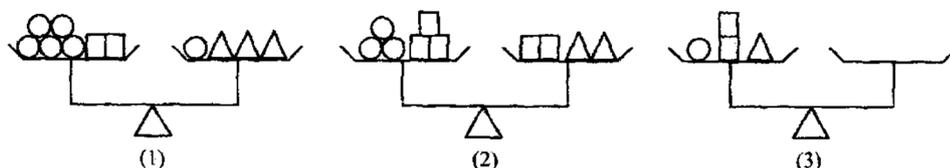
假設小佑原有  $x$  元

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x \times \frac{1}{4} = 300, \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 300, \quad 3x = 1800, \quad x = 600$$

$$\text{所以立可帶} = 600 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{100}{80} = 125$$

8. As shown in the figure, the object of the same shape in the three balances are equal quality. The two balances shown in Figure(1) and Figure(2) are in equilibrium. To balance the third balance, you need to place ⑧ balls in its right plate.

翻譯:如圖，三個天平的托盤中形狀相同的物體品質相等。圖(1)、圖(2)所示的兩個天平處於平衡狀態，要使第三個天平也保持平衡，則需在它的右盤中放置 ⑧ 個球。



<解析>

$$\bigcirc \times 5 + \square \times 2 = \bigcirc + \triangle \times 3 \rightarrow \bigcirc \times 4 + \square \times 2 = \triangle \times 3$$

$$\bigcirc \times 3 + \square \times 3 = \square \times 2 + \triangle \times 2 \rightarrow \bigcirc \times 3 + \square = \triangle \times 2, \bigcirc \times 6 + \square \times 2 = \triangle \times 4$$

$$\bigcirc \times 2 = \triangle \rightarrow \square = \bigcirc, \text{ 則第三個右盤} = \bigcirc \times 5, \text{ 要放置 5 個球}$$

### 三、計算題(共 32 分) ※未寫計算過程不予計分

1. 已知一台斤 =  $\frac{3}{5}$  公斤，雨潔以每公斤 40 元買進棗子 30 公斤，雨潔再將棗子分成上等與中等二種，上等棗子占進貨的  $\frac{2}{5}$ ，其餘是中等；今上等棗子以每台斤 60 元全部賣出，中等棗子有  $\frac{1}{6}$  壞了不能賣，其餘以每台斤 40 元全部賣出，試問她賺了多少元?(10 分)

<解析>

$$\text{成本} = 40 \times 30 = 1200 \text{ (元)}, 30 \div \frac{3}{5} = 50 \text{ 台斤}$$

$$\text{上等棗子的收入} = 50 \times \frac{2}{5} \times 60 = 1200 \text{ 元}$$

$$\text{中等棗子的收入} = 50 \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} \times 40 = 1000 \text{ 元}$$

$$\text{賺了 } 1200 + 1000 - 1200 = 1000$$

答:賺了 1000 元。

2. 把 2019 個蘋果分給若干個人，每人至少分一個，且每人分的數目各不相同，  
求(1)至多可以有多少人分這些蘋果，在這種情況下共有多少種分法?(4 分)  
(2)如果分給 49 個人，一個人分到的蘋果數不能超過 74，則共用多少種分法?(8 分)

<解析>

(1)考慮分最多的人，所以每人分到的蘋果數越少越好， $1+2+3+\dots+63=2016$ ，而最後三個蘋果，在保證條件成立的情況下，可以分給其中某人或某幾個人，所以至多可分給 63 個人。

考慮在分給 63 個人的情況下，如果這 63 個人，依次拿 1-63 個蘋果，已經是最少的蘋果數，剩下三個蘋果可以給一個人或者給兩個人或三個人，保證每人數目不同，所以共有三種分法。

$$(2) (17+65) \times 49 \div 2 = 2009$$

$$2019 - 2009 = 10$$

故  $17+18+19+\dots+63+64+75=2019$  (不滿足條件)

滿足最後兩位的分法有

$$65+74=66+73=67+72=68+71=69+70 \text{ (滿足條件，共 5 種分法)}$$

以此類推

滿足最後三位的分法有

$$1+1+8=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4 \text{ (滿足條件，共 8 種分法)}$$

滿足最後四位的分法有

$$1+1+1+7=1+1+2+6=1+1+3+5=1+1+4+4=1+2+2+5=1+2+3+4=1+3+3+3=2+2+2+4=2+2+3+3 \text{ (滿足條件，共 9 種分法)}$$

滿足最後五位的分法有

$$1+1+1+1+6=1+1+1+2+5=1+1+1+3+4=1+1+2+2+4=1+1+2+3+3=1+2+2+2+3=2+2+2+2+2 \text{ (滿足條件，共 7 種分法)}$$

滿足最後六位的分法有

$$1+1+1+1+1+5=1+1+1+1+2+4=1+1+1+1+3+3=1+1+1+2+2+3=1+1+2+2+2+2 \text{ (滿足條件，共 5 種分法)}$$

滿足最後七位的分法有

$$1+1+1+1+1+1+4=1+1+1+1+1+2+3=1+1+1+1+2+2+2 \text{ (滿足條件，共 3 種分法)}$$

滿足最後八位的分法有

$$1+1+1+1+1+1+1+3=1+1+1+1+1+1+2+2 \text{ (滿足條件，共 2 種分法)}$$

滿足最後九位的分法有

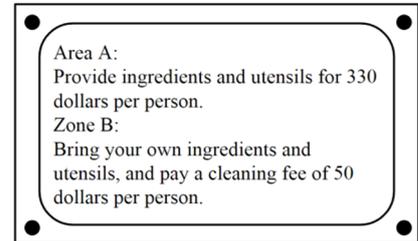
$$1+1+1+1+1+1+1+1+2 \text{ (滿足條件，共 1 種分法)}$$

滿足最後十位的分法有

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \text{ (滿足條件，共 1 種分法)}$$

故共有  $5+8+9+7+5+3+2+1+1=41$  種。

3. The BBQ area in the forest amusement park is divided into two zones(A/B zones). The charging standard is as shown in the figure below. It is know that there are 24 furnaces in the whole area. Each BBQ furnace can hold 10 people. One day, all seats in the BBQ area are fully, no vacant seat. The income is 54,000 dollars in total. How many people in A-zone are there more than in B-zone? (10 分)



翻譯: 森林遊樂園的烤肉區分為 A、B 兩區，其收費標準如圖，已知全區有 24 個爐位，每個爐位可坐 10 人，某天烤肉區內剛好全部坐滿，沒有空位，共收入 54000 元，請問 A 區可容納的人數比 B 區多幾人?

<解析>

假設甲區可容納  $x$  人，乙區可容納  $(240-x)$  人

$$330x + 50 \times (240 - x) = 54000$$

$$33x + 1200 - 5x = 5400$$

$$28x = 4200$$

$$x = 150$$

$$\text{則乙區} = 240 - 150 = 90$$

$$\text{相差 } 150 - 90 = 60(\text{人})$$

答: 甲區比乙區多容納了 60 人

