2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中三年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2019 第十五屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2019 Fifteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

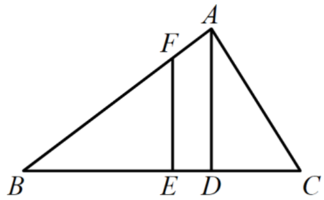
(B)1. 已知 $a^2-5a+2=0$，那麼 $2a^2-9a+\dfrac{10}{a^2+2}=$________.

(A) 0　(B)1　(C)2　(D)3

<解析> $2a^2-9a+\dfrac{10}{a^2+2}=\left(2a^2-10a\right)+a+\dfrac{10}{5a}=-4+a+\dfrac{2}{a}=\dfrac{a^2-4a+2}{a}=\dfrac{a}{a}=1$，選 B。

(A)2. 如右圖，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\overline{EF}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，若 $\overline{AB}=15$，$\overline{BD}=9$，$\overline{CD}=5$，則 $\overline{AF}=$?

(A)$\dfrac{10}{3}$　(B)$\dfrac{16}{5}$　(C)$\dfrac{13}{4}$　(D)$\dfrac{17}{6}$



<解析>

$\because \angle B=\angle B$ 且 $\angle BEF=\angle BDA$

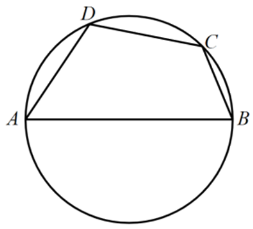
$\therefore \triangle ABD \sim \triangle FBE$(AA 相似)

$\overline{BE}=(9+5)\times\dfrac{1}{2}=7$，假設 $\overline{AF}=x$

$\overline{BF}:\overline{BA}=\overline{BE}:\overline{BD}$ ➔ $(15-x):15=7:9$，$9x=30$，$x=\dfrac{10}{3}$，選 A。

(D)3. 如右圖，四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，$\overline{AB}$ 為直徑，若 $\overset{\frown}{CD}=50^\circ$，求 $\angle A+\angle B=$?

(A)100°　(B)105°　(C)110°　(D)115°



<解析>

$\angle A=\dfrac{1}{2}\times(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$，$\angle B=\dfrac{1}{2}\times(\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD})$

➔ $\angle A+\angle B=\dfrac{1}{2}\times(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD})+\dfrac{1}{2}\times(\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD})=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ+50^\circ)=115^\circ$，選 D。

(C)4. 二次函數 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 為常數，且 a≠0）中的 x 與 y 的部分對應值如下表：

x	-1	0	1	3
y	1	3	4	3

下列結論中，正確的命題的序號是為________.

①ac＜0　②當 x＞1 時，y 的值隨 x 值的增大而減小

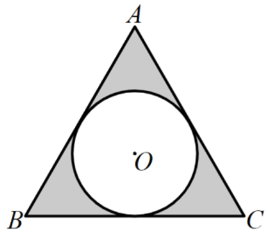
③當 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的兩個根，則 $2x_1+x_2<0$

④當 $-1<x<3$ 時，$ax^2+(b-1)x+c>0$

(A)①②(B)②③(C)①④(D)②④

<解析>①④

(A)5. 如右圖，圓 O 是正三角形 ABC 的內切圓，半徑是$2\sqrt{3}$公分，則塗色部分的面積是多少平方公分?(A)$36\sqrt{3}-12\pi$ (B)$36\sqrt{3}-4\pi$ (C)$12\sqrt{3}-12\pi$ (D)$12\sqrt{3}-4\pi$



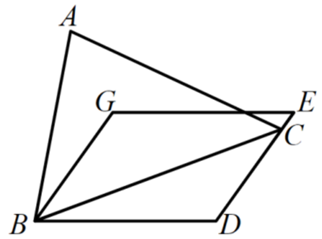
<解析>

假設正三角形的邊長是 x 公分且圓 O 是內心

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times x^2=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3\times x$，$x^2-12x=0$，$x=12$ 或 0(不合)

∴塗色面積=$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2-2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\pi=36\sqrt{3}-12\pi$(平方公分)

(C)6. 如右圖，四邊形 BDEG 為平行四邊形，G 為△ABC 的重心，且 C 在$\overline{DE}$上。若平行四邊形 BDEG 的面積為 12 平方公分，則△ABC 的面積為何?(A)12 (B)16 (C)18 (D)20 平方公分

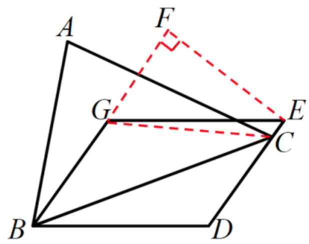


<解析>

平行四邊形 *BDEG* 面積

$=\overline{BG}\times\overline{EF}$=△*BGC* 面積×2=$\frac{1}{3}$×△*ABC* 面積×2=12

∴△*ABC* 面積=12×3÷2=18(平方公分)



(B)7. The solution to the equation $|a|x=|a+1|-x$ is $x=1$ that the real number a value range is __________. (A)$a>0$ (B)$a\geq 0$ (C)$a<-1$ (D)$a\geq -1$

<解析>

翻譯: 關於 x 的方程$|a|x=|a+1|-x$ 的解$x=1$是，則實數 a 的取值範圍是__________。

代入$x=1$得$|a|=|a+1|-1$

➔ $|a|+1=|a+1|$，兩邊同時平方$(|a|+1)^2=(|a+1|)^2$

➔ $a^2+2|a|+1=a^2+2a+1$

➔ $|a|=a$，則 $a\geq 0$

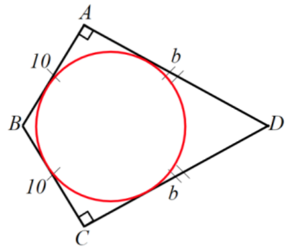
二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

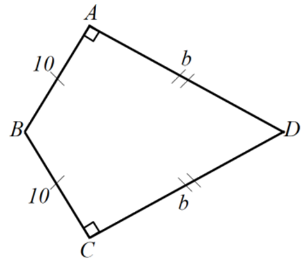
1. 方程$2x-x^2=\dfrac{2}{x}$的實數根的個數為____①____。

<解析>

考慮$y_1=2x-x^2$與$y_2=\dfrac{2}{x}$的圖像，只有在第三象限有一個交點，所以原方程只有一個實根.

2. 右圖四邊形外切於一個半徑為 6 的圓，求 b=____②____。





<解析>

連接$\overline{BD}$ ➔ $ABCD$ 面積=$\triangle ABD+\triangle BCD$

$\dfrac{1}{2}\times 6\times(10+b+10+b)=\dfrac{1}{2}\times 10\times b\times 2$

$3\times(20+2b)=10b$

$b=15$

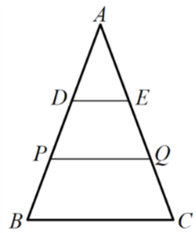
3. 用 2, 0, 1, 9 這四個數組成ef^{gh}的形式（ef、gh分別表示十位是 e 個位是 f 和十位是 g 個位是 h 的兩位數），最小的數為____③____。

<解析>

先考慮指數越小，再考慮底數越小，所得到的值越小

故最小的數為29^{10}

4. 如右圖，△ABC 中，$\overline{AD}=\overline{DP}=\overline{PB}$，$\overline{DE}//\overline{PQ}//\overline{BC}$，求△ADE 面積：△APQ 面積：△ABC 面積=____④____。



<解析>

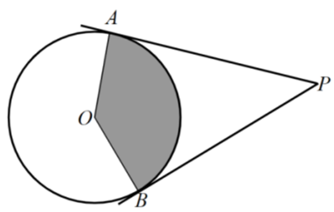
假設$\overline{DE}=x$ ∵$\overline{DE}//\overline{PQ}//\overline{BC}$

➔ $\dfrac{x}{\overline{PQ}}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{x}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{3}$

∴$\overline{PQ}=2x$，$\overline{BC}=3x$

∴$\triangle ADE:\triangle APQ:\triangle ABC=\overline{DE}^2:\overline{PQ}^2:\overline{BC}^2=x^2:(2x)^2:(3x)^2=1:4:9$

5. 如右圖，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$與圓 O 相切於 A、B 兩點，已知$\angle APB=45°$，圓 O 的半徑為 3 公分，則扇形 AOB 的面積等於____⑤____平方公分。



<解析>

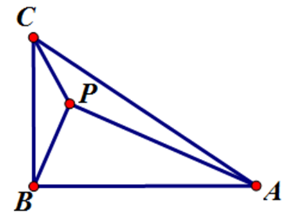
在四邊形 $AOBP$ 中，∵$\overline{PA}$、$\overline{PB}$是切線

∴$\angle OAP=\angle OBP=90°$且$\angle APB=45°$

➔ $\angle AOB=360°-90°-90°-45°=135°$

扇形 AOB 面積$=3\times 3\times\dfrac{135°}{360°}\times\pi=\dfrac{27}{8}\pi$

6. 如圖，在 Rt△ABC 中，$\overline{AB} \perp \overline{BC}$，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=4$．點 P 是△ABC 內部的一個動點，且滿足∠PAB=∠PBC．則線段 CP 長的最小值為 ⑥ 。



<解析>

已知∠APB＝90°，所以點 P 的軌跡為以 AB 為直徑的半圓，所以線段 CP 的最小值即為點 C 到 AB 中點的距離減去半徑（$\frac{1}{2}\overline{AB}$）.

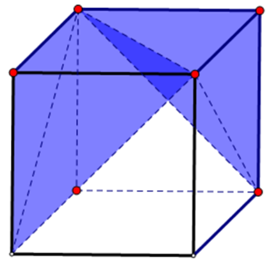
線段 CP=$\sqrt{3^2+4^2}-\frac{1}{2}\times 6$=2

7. 如圖一個立方體，邊長為 1，被切了兩刀，切下陰影的兩塊，則剩下部分幾何體的表面積為 ⑦ 。

<解析>

剩下的幾何體是對稱形體，它的表面由一個正方形，四個等腰直角三角形和兩個正三角形構成.

$$S=1+4\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2=3+\sqrt{3}$$



8. As right graph, $\overline{TQ}$ is tangent line of the circle. $\overline{TQ}$ and $\overline{PB}$ is intersected at point A. Point A is tangent point, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$, if $\angle PAQ=48°$, then $\angle QAC=$ ⑧ .

<解析>

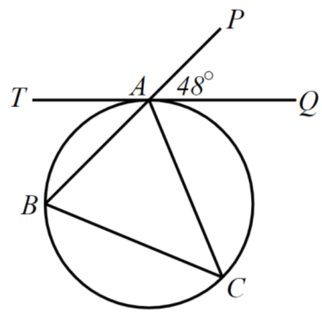
翻譯:如右圖，$\overline{TQ}$ 為圓的切線，$\overline{TQ}$ 和 $\overline{PB}$ 交於 A，A 為切點，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，若 $\angle PAQ=48°$，則 $\angle QAC=?$

$\angle PAQ=\angle TAB=48°$ 且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=48°\times 2=96°$

➔ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}=(360°-96°)\div 2=132°$

➔ $\angle QAC=132°\div 2=66°$



三、計算題(共 32 分) ※未寫計算過程不予計分

1. $1\times2\times3\times4\times...\times2019=12^m\times A\times10^n$，其中 A 是使得式子成立的最小的整數，則 $m=?$(10 分)

<解析>

1—2019 中共有因數 2：

$$\left[\frac{2019}{2}\right]+\left[\frac{2019}{4}\right]+L+\left[\frac{2019}{1024}\right]=1009+504+252+126+63+31+15+7+3+1=2011$$ ；

共有因數 5：

$\left[\frac{2019}{5}\right]+\left[\frac{2019}{25}\right]+\left[\frac{2019}{125}\right]+\left[\frac{2019}{625}\right]$=403+80+16+3=502；

共有因數 3：

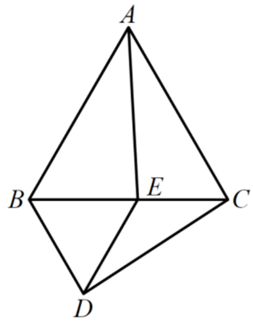
$\left[\frac{2019}{3}\right]+\left[\frac{2019}{9}\right]+\text{L}+\left[\frac{2019}{729}\right]$=673+224+74+24+8+2=1005 ；

所以 $n=502$ ，2011-502=1509 ，$1005\times 2>1509$，所以 $m=[1509\div 2]=754$。

2. As right graph, △ABC is a regular triangle. E is on $\overline{BC}$, and △BDE is also a regular triangle.

(1) Prove △ABE≅△CBD. (6 分)

(2) If $\angle BCD=25°$, calculate the degree of $\angle AEC$. (4 分)



翻譯:如右圖，△ABC 為正三角形，E 在 $\overline{BC}$ 上，且△BDE 也是正三角形。

(1)試證： △ABE≅△CBD。(6 分)

(2)承(1)題，若 $\angle BCD=25°$ ，試求 $\angle AEC$ 的度數。(4 分)

<解析>

(1)在△ABE 與△CBD 中

① $\overline{BD}=\overline{BE}$ ② $\overline{AB}=\overline{BC}$ ③ $\angle ABE=\angle CBD=60°$

∴△ABE≅△CBD (SAS 全等)

(2)∵△ABE≅△CBD

∴ $\angle BCD=\angle BAE=25°$

故 $\angle AEC=\angle ABE+\angle BAE=60°+25°=85°$

3. 已知 A_1、A_2、A_3 是拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上的三點，A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3 分別垂直於 x 軸，垂足為 B_1、B_2、B_3，直線 A_2B_2 交線段 A_1A_3 於點 C.

（1）如圖 1，若 A_1、A_2、A_3 三點的橫坐標依次為 1、2、3，求線段 CA_2 的長；(4 分)

（2）如圖 2，若將拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 改為拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$，A_1、A_2、A_3 三點的橫坐標為連續整數，其他條件不變，求線段 CA_2 的長；(4 分)

（3）若將拋物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 改為拋物線 $y=ax^2+bx+c$，A_1、A_2、A_3 三點的橫坐標為連續整數，其他條件不變，請猜想線段 CA_2 的長（用 a、b、c 表示，並直接寫出答案）.（4 分）

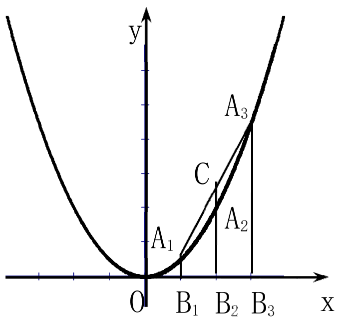


圖 1

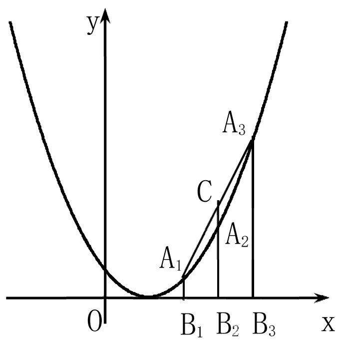


圖 2

<解析>

（1）∵A_1 、A_2 、A_3三點的橫坐標依次為 1、2、3，

∴$\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$ ，$\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\times2^2=2$ ，$\overline{A_3B_3}=\frac{1}{2}\times3^2=\frac{9}{2}$.

設直線$\overline{A_1A_3}$的解析式為 y=kx+b. ∴$\begin{cases}\frac{1}{2}=k+b\\ \frac{9}{2}=3k+b\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=2\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$

∴直線$\overline{A_1A_3}$的方程式為 $y=2x-\frac{3}{2}$.

∴$\overline{CB_2}=2\times2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$. ∴$\overline{CA_2}=\overline{CB_2}-\overline{A_2B_2}=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$.

（2）設A_1 、A_2 、A_3三點的橫坐標依次為 n-1、n、n+1 .

則$\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}(n-1)^2-(n-1)+1$ ，$\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}n^2-n+1$ ，$\overline{A_3B_3}=\frac{1}{2}(n+1)^2-(n+1)+1$.

設直線$\overline{A_1A_3}$的方程式為 y=kx+b.

∴$\begin{cases}(n-1)k+b=\frac{1}{2}(n-1)^2-(n-1)+1\\ (n+1)k+b=\frac{1}{2}(n+1)^2-(n+1)+1\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=n-1\\ b=-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}\end{cases}$

∴直線$\overline{A_1A_3}$的方程式為 $y=(n-1)x-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}$.

∴$\overline{CB_2}=n(n-1)-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}n^2-n+\frac{3}{2}$.

∴$\overline{CA_2}=\overline{CB_2}-\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}n^2-n+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}n^2+n-1=\frac{1}{2}$.

（3）當 a＞0 時，$\overline{CA_2}$=a；當 a＜0 時，$\overline{CA_2}$=-a.