

第二十一屆 國際數學競賽台灣區複賽
21st International Mathematics Contest(Taiwan)

國
中
三
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

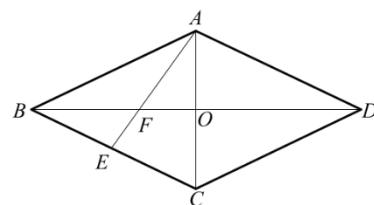
考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

- ◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	C	C	B	A	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	12	-5	420	$(-4, 63)$ $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	215	3	6	$3(3x-y)(x+2y-5z)(5z-4x-y)$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. Quadrilateral $ABCD$ is a rhombus. Let E be the midpoint of side BC , and let $\overline{OF} = 2$. If the area of $ABCD$ is 48, what is the perimeter of the rhombus $ABCD$? (A) $8\sqrt{13}$ (B) $4\sqrt{13}$ (C) 16 (D) 8



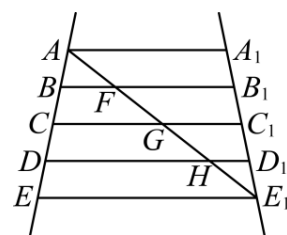
<解析>

F 是 $\triangle ABC$ 的重心， $\overline{OF}=2$

$$\therefore \overline{OB}=2 \times 3=6, \text{ 設 } \overline{AC}=x, \frac{12 \times x}{2}=48, 6x=48, x=8$$

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$ ，菱形的周長 $=4 \times 2\sqrt{13}=8\sqrt{13}$ ，選 A。

2. 已知 $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1} \parallel \overline{DD_1} \parallel \overline{EE_1}$ ，且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$ 。連線段 $\overline{AE_1}$ 分別交 $\overline{BB_1}$ 、 $\overline{CC_1}$ 、 $\overline{DD_1}$ 於點 F 、 G 、 H 。若 $\overline{AF}=0.7$ 米，則線段 $\overline{AE_1}$ 的長為_____米。(A) 2.6 (B) 2.8 (C) 3 (D) 3.2



<解析>

$$\because \overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1} \parallel \overline{DD_1} \parallel \overline{EE_1}, \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE_1}}$$

$$\because \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}, \therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{1}{4} \rightarrow \overline{AF}=0.7, \overline{AE_1}=4\overline{AF}=2.8, \text{ 選 B。}$$

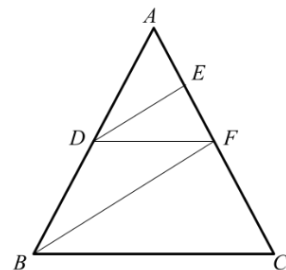
3. 如圖， $\overline{DE} \parallel \overline{BF}$ ， $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{DE}=6$ ， $\overline{DF}=8$ ， $\overline{BF}=10$ ，則 $\overline{BC}=?$

- (A) $\frac{20}{7}$ (B) $\frac{40}{7}$ (C) $\frac{20}{3}$ (D) $\frac{40}{3}$

<解析>

$$\because \overline{DE} \parallel \overline{BF}, \overline{DF} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BC}}, \frac{6}{10} = \frac{8}{\overline{BC}}, 6\overline{BC}=80, \overline{BC}=\frac{80}{6}=\frac{40}{3}, \text{選 D。}$$



4. 如圖， $\triangle ABC$ 的三邊長滿足 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}}$ ，延長 $\overline{CB}$ 到 D ，使 $\overline{BD} = \overline{AB}$ ，若 $\angle C = 75^\circ$ ，則 $\angle ABC$ 的度數是_____。

- (A) 65° (B) 68° (C) 70° (D) 72°

<解析>

$$\because \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a+b+c}, a^2+ab+ac=ab+b^2, a(a+c)=b \cdot b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a+c}, \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

$$\text{又 } \angle ACB = \angle ACD$$

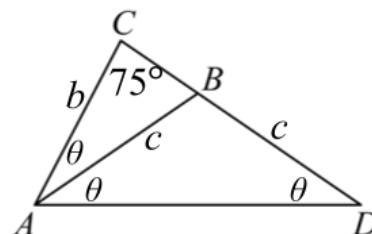
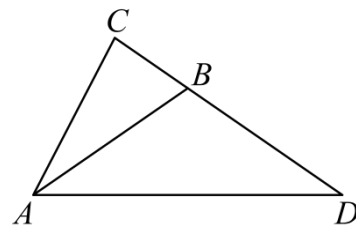
$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle DCA$$

$$\therefore \angle D = \angle CAB = \theta, \overline{BD} = \overline{AB}$$

$$\therefore \angle D = \angle BAD = \theta \rightarrow \angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 2\angle D = 2\theta$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中}, 3\theta + 75^\circ = 180^\circ, \theta = 35^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 2\theta = 70^\circ, \text{選 C。}$$



5. 如右圖，直線 L 與圓 O 相切於 P 點， A 為直線 L 上一點， $\overline{OA}$ 與圓 O 相交於 B 點。已知 $\overline{PA}=16$ ， $\overline{AB}=8$ ，求圓 O 的半徑=? (A) 9 (B) $9\sqrt{3}$ (C) 12 (D) $12\sqrt{3}$

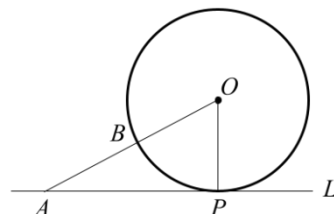
<解析>

設圓 O 的半徑為 r ，且 $\overline{OP} \perp L$ 於 P 點

$\therefore \triangle AOP$ 是直角三角形

$$\therefore r^2 + 16^2 = (r+8)^2, r^2 + 256 = r^2 + 16r + 64, 16r = 192, r = 12$$

故圓 O 的半徑=12，選 C。



6. 已知直角 $\triangle ABC$ 的兩直角邊長為 a 、 b ，且滿足 $(a^2+b^2)^2 - 5(a^2+b^2) - 14 = 0$ ，則該三角形的斜邊長為_____。(A) $\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{10}$

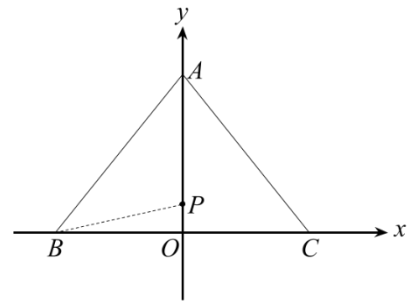
<解析>

$$(a^2+b^2)^2 - 5(a^2+b^2) - 14 = 0, (a^2+b^2-7)(a^2+b^2+2) = 0$$

$$a^2+b^2=7 \text{ 或 } a^2+b^2=-2(\text{不合}), a^2+b^2=7$$

在 $RT\triangle ABC$ 中， $a^2+b^2=c^2$ ， $c^2=7$ ， $c=\sqrt{7}$ (取正)，該三角形的斜邊長= $\sqrt{7}$ ，選 B。

7. 如右圖，坐標平面上 A 、 B 、 C 三點坐標分別為 $(0, 8)$ 、 $(-6, 0)$ 、 $(6, 0)$ ，若 P 點為 $\triangle ABC$ 之外心，則 P 點之坐標為何？(A) $(0, \frac{7}{4})$ (B) $(0, \frac{8}{3})$ (C) $(0, \frac{25}{4})$ (D) $(0, \frac{25}{6})$



<解析>

$\overline{OA}=8$ ，令 $\overline{OP}=a$ ，則 $\overline{PA}=8-a$ ，又 P 是 $\triangle ABC$ 的外心

$$\therefore \overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PA}=8-a$$

直角 $\triangle BPO$ 中， $(8-a)^2=a^2+6^2$ ， $64-16a+a^2=a^2+36$ ， $16a=28$ ， $a=\frac{7}{4}$

$\therefore P(0, \frac{7}{4})$ ，選 A。

8. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ， $a^2+b^2+c^2=361$ ，則 $a+b+c$ 的值等於_____。(A) ± 16 (B) ± 17 (C) ± 18 (D) ± 19

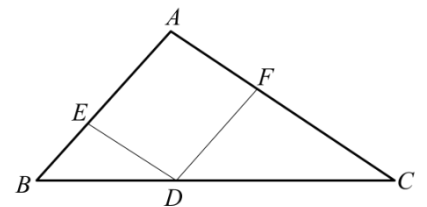
<解析>

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0, \frac{bc+ac+ab}{abc}=0, bc+ac+ab=0, 2bc+2ac+2ab=0 \text{ 且 } a^2+b^2+c^2=361$$

$$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=361, a+b+c=19 \text{ 或 } -19, \text{ 選 D。}$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{BC}$ 上一點，過 D 作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的平行線分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 E 、 F 兩點，若 $\triangle BED$ 的面積為 4cm^2 ， $\triangle DFC$ 的面積為 9cm^2 ，則四邊形 $AEDF$ 的面積為_____ cm^2 。



<解析>

$$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{AC} \text{ 且 } \overline{DF} \parallel \overline{AB}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD \sim \triangle FDC (AA \text{ 相似}) \rightarrow \overline{BD}:\overline{DC}=\sqrt{4}:\sqrt{9}=2:3$$

$$\therefore \triangle BDE:\triangle ABC=2^2:(2+3)^2=4:25, \text{ 則 } \triangle ABC=25$$

$$\therefore \text{四邊形 } AEDF=25-4-9=12(\text{cm}^2)$$

2. 代數式 $x^2-2xy+5y^2+4x-16y+8$ 的最小值是_____。

<解析>

$$x^2-2xy+5y^2+4x-16y+8=(x-y+2)^2+(2y-3)^2-5$$

因為任何數的平方都大於等於 0，所以 $x^2-2xy+5y^2+4x-16y+8 \geq -5$

當 $x-y+2=0$ ， $2y-3=0$ 時，代數式取最小值 -5，此時 $x=-\frac{1}{2}$ ， $y=\frac{3}{2}$

故最小值是 -5。

3. 設有 1 元硬幣 x 枚，5 元硬幣 y 枚，10 元硬幣 z 枚，若 $x:y:z=35:24:25$ ，且總金額為 2025 元，則 $x+y+z=$ _____。

<解析>

$$\text{令 } x=35r, y=24r, z=25r$$

$$1 \cdot 35r + 5 \cdot 24r + 10 \cdot 25r = 2025, 35r + 120r + 250r = 2025$$

$$405r = 2025, r = 5, \text{ 則 } x+y+z=r \times (35+24+25) = 5 \times 84 = 420$$

4. 無論 k 取何值，關於 x 的二次函數 $y=(2k+4)x^2+(5k-1)x-(12k+5)$ 的圖像必經過定點_____。(全對才給分)

<解析>

$$y=(2k+4)x^2+(5k-1)x-(12k+5)=k(2x^2+5x-12)+4x^2-x-5=k(x+4)(2x-3)+4x^2-x-5$$

$$\text{當 } x=-4 \text{ 時, } y=4(-4)^2-(-4)-5=63; \text{ 當 } x=\frac{3}{2} \text{ 時, } y=4\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)-5=\frac{5}{2}$$

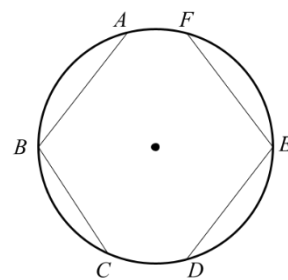
∴ 無論 k 取何值，二次函數的圖像必定經過定點 $(-4, 63)$ 及 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

5. 如右圖， $\widehat{AF}=30^\circ$ ， $\widehat{CD}=40^\circ$ ，則 $\angle B + \angle E =$ _____度。

<解析>

$$\angle B = \frac{1}{2} \widehat{AEC}, \quad \angle E = \frac{1}{2} \widehat{FBD}$$

$$\therefore \angle B + \angle E = \frac{1}{2} (\widehat{AEC} + \widehat{FBD}) = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ + 30^\circ + 40^\circ) = 215^\circ$$



6. How many natural numbers x are there such that $\frac{x^3-2x^2-3x+8}{x+1}$ is an integer? _____.

<解析>

$$\frac{x^3-2x^2-3x+8}{x+1}=x^2-3x+\frac{8}{x+1}, \text{ 因為分式的值為整數且 } x \text{ 為自然數}$$

$$\therefore x+1=1 \text{ 或 } x+1=2 \text{ 或 } x+1=4 \text{ 或 } x+1=8$$

$$\therefore x=0(\text{不合})、1、3、7, \text{ 共 } 3 \text{ 個。}$$

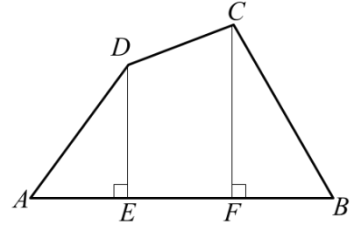
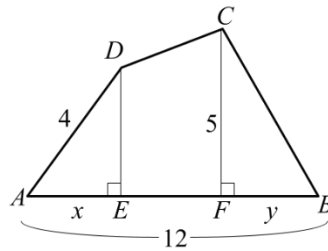
7. 如圖， $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ ，已知 $\overline{AD}=4$ ， $\overline{CF}=5$ ， $\overline{AB}=12$ ， $\cos A = \frac{1}{2}$ ， $\tan B = \frac{5}{4}$ ，求 $\overline{EF}$ 的長是_____。

<解析>

$$\triangle ADE \text{ 中, } \cos A = \frac{x}{4} = \frac{1}{2}, x=2$$

$$\triangle BFC \text{ 中, } \tan B = \frac{5}{y} = \frac{5}{4}, x=4$$

$$\text{則 } \overline{EF} = 12 - 2 - 4 = 6$$



8. 分解因式 $(3x-y)^3+(x+2y-5z)^3+(5z-4x-y)^3=$ _____。

<解析>

$$\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$\text{且 } (3x-y)+(x+2y-5z)+(5z-4x-y)=0$$

$$\therefore (3x-y)^3+(x+2y-5z)^3+(5z-4x-y)^3=3(3x-y)(x+2y-5z)(5z-4x-y)$$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. On the same coordinate plane, there is a parabola $y=x^2$ and a line $y=x+6$. Find the coordinates of their two intersection points, A and B , and determine the length of segment AB .

<解析>

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+6 \end{cases} \rightarrow x^2=x+6, x^2-x-6=0, (x-3)(x+2)=0, x=3 \text{ 或 } x=-2$$

$$\text{當 } x=3, y=3+6=9, \text{ 則 } A(3, 9); \text{ 當 } x=-2, y=-2+6=4, \text{ 則 } B(-2, 4)。$$

$$\overline{AB} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (9-4)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

2. 已知 23 個數 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{23}$ ，每個數只能取+1 或-1 兩個值之一，求它們的兩兩之積的和 $a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_2a_3+\dots+a_{22}a_{23}$ 的最小值。

<解析>

設 23 個數中有 m 個-1，有 $(23-m)$ 個+1

m 個-1 中任兩個的積為 1，其有 $\frac{1}{2}m(m-1)$ 個 1， $(23-m)$ 個+1 中任兩個的積為 1，共有 $\frac{1}{2}(23-m)(22-m)$ 個 1，總共有 $\frac{1}{2}(23-m)(22-m)+\frac{1}{2}m(m-1)=m^2-23m+253$ 個積為 1，其和為 $m^2-23m+253$

m 個-1 中任一個與 $(23-m)$ 個+1 中任一個的積為-1，共有 $m(23-m)$ 個-1，其和為 $-m(23-m)$

設 $y=a_1a_2+a_1a_3+\dots+a_2a_3+\dots+a_{22}a_{23}$ ，

則 $y=m^2-23m+253-m(23-m)=2(m-11.5)^2-11.5$

當 $m=11$ 或 12 時， y 的最小值為-11