

第二十一屆  國際數學競賽台灣區複賽
21st International Mathematics Contest(Taiwan)

國
小
六
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	D	C	C	B	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	67	85	202.5	7592	17	23	3	1

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 將 50 和 130 之間的整數，去掉 2、3、5、7 的倍數後，所剩下的整數中最大的是多少? (A)129 (B)127 (C)121 (D)119

<解析>

$129 \div 3 = 43$ ， $128 \div 2 = 64$ ， $127 \rightarrow$ 最大是 127，選 B。

2. 2025 的四個數字組成的最大四位數為 5220，最小四位數為 2025，兩者的差為 $5220 - 2025 = 3195$ 。然後再用 3195 的四個數字組成最大與最小四位數的差為 $9531 - 1359 = 8172$ 。如此下去作差 2025 次，最後一次得到的差為_____。
(A)3996 (B)6264 (C)4176 (D)6174

<解析>

$5220 - 2025 = 3195$ ， $9531 - 1359 = 8172$ ， $8721 - 1278 = 7443$ ， $7443 - 3447 = 3996$ ， $9963 - 3699 = 6264$ ， $6642 - 2466 = 4176$ ， $7641 - 1467 = 6174$ ，後面均不變，第 2025 次後得到的差是 6174，選 D。

3. 有一棟二十層的樓房，每層高度都相等，從 1 樓爬到 20 樓的高度是從 1 樓爬到 10 樓高度的幾倍? (A) $\frac{19}{9}$ (B) $\frac{21}{11}$ (C) $\frac{20}{9}$ (D) 2

<解析>

$\frac{20-1}{10-1} = \frac{19}{9}$ ，選 A。

4. 現有一個養雞場和一個兔養殖場。如果雞減少 8 隻，那麼雞數是兔數的 $\frac{3}{5}$ ；
 如果兔減少 8 隻，那麼雞數是兔數的 $\frac{2}{3}$ 。原來雞兔共有_____隻。
 (A) 325 (B) 326 (C) 327 (D) 328

<解析>

設雞有 x 隻，兔有 y 隻，則

$$\begin{cases} \frac{x-8}{y} = \frac{3}{5} \\ \frac{x}{y-8} = \frac{2}{3} \end{cases}, \begin{cases} x=128 \\ y=200 \end{cases}.$$

<另解>

和不變	雞	兔	和
雞-8	3×5	5×5	8×5
兔-8	2×8	3×8	5×8

$$8 \div (2 \times 8 - 3 \times 5) = 8 \text{ 隻}$$

$$8 \times 16 = 128 \text{ 隻，選 D。}$$

5. 有甲、乙兩個正整數，若它們的最大公因數為 14，則下列哪一個數可能是它們的最小公倍數? (A) 44 (B) 54 (C) 84 (D) 104

<解析>

最小公倍數一定是最大公因數的倍數

故 $84 \div 14 = 6$ ，選 C。

6. In the long division setup, only the four digits 2, 0, 2, and 5 are used. Fill in each box with an appropriate digit to make the division valid. What is the dividend? _____ . (A) 3065 (B) 3295 (C) 3305 (D) 3415

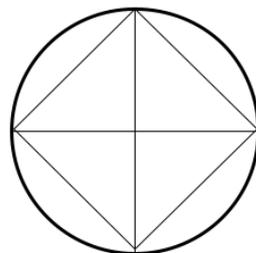
<解析>

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \boxed{4} \boxed{3} \\ \boxed{2} \boxed{3} \overline{) \boxed{3} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{5}} \\ \underline{\boxed{2} \boxed{3}} \\ \boxed{1} \boxed{0} \boxed{0} \\ \underline{ \boxed{9} \boxed{2}} \\ \boxed{8} \boxed{5} \\ \underline{ \boxed{6} \boxed{9}} \\ \boxed{1} \boxed{6} \end{array}$$

則被除數為 3305，選 C。

$$\begin{array}{r} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ \boxed{} \boxed{} \overline{) \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{}} \\ \underline{ \boxed{2} \boxed{}} \\ \boxed{} \boxed{0} \boxed{} \\ \underline{ \boxed{2}} \\ \boxed{} \boxed{5} \\ \underline{ \boxed{} \boxed{}} \\ \boxed{} \boxed{} \\ \underline{ \boxed{} \boxed{}} \end{array}$$

7. 有一張圓形紙，對折兩次後，再將 2 條互相垂直的直徑連起來，形成一個正方形，其正方形面積為 49 平方公分，求這個圓面積是約多少平方公分？(A)75.36 (B)76.93 (C)78.5 (D)80.07



<解析>

假設半徑= \square ，故對角線=直徑= $\square \times 2$

$$\square \times 2 \times \square \times 2 \div 2 = 49, \quad \square \times \square = \frac{49}{2}$$

故圓面積= $\square \times \square \times 3.14 = \frac{49}{2} \times 3.14 = 76.93$ ，選 B。

8. 有四張卡片，正、反面分別寫有數字 0 和 1，2 和 3，4 和 5，5 和 6。將這四張卡片上的數字排成四位數，這樣的四位數共有_____個。(A)266 (B)274 (C)286 (D)294

<解析>

6 開頭，前二位數有 65、64、63、62、61、60

65□□、64□□、63□□、62□□、61□□、60□□各有 8 種，共有 $8 \times 6 = 48$ 種

5 開頭，前二位數有 56、55、54、53、52、51、50

56□□、55□□、54□□各有 8 種、53□□、52□□、51□□、50□□各有 16 種

共有 $8 \times 3 + 16 \times 4 - 16 = 24 + 48 = 72$ 種

4 開頭，前二位數有 46、45、43、42、41、40

46□□、45□□、43□□、42□□、41□□、40□□各有 8 種，共有 $8 \times 6 = 48$ 種

3 開頭，前二位數有 36、35、34、31、30

36□□有 8 種、35□□有 12 種、34□□有 8 種，31□□、30□□各有 7 種

共有 $8 \times 2 + 12 + 7 \times 2 = 42$ 種

2 開頭，前二位數有 26、25、24、21、20

26□□有 8 種、25□□有 12 種、24□□有 8 種、21□□、20□□各有 7 種

共有 $7 \times 2 + 8 \times 2 + 12 = 42$ 種

1 開頭，前二位數有 16、15、14、13、12

16□□有 8 種、15□□有 12 種、14□□有 8 種、13□□、12□□各有 7 種

共有 $7 \times 2 + 8 \times 2 + 12 = 42$ 種

合計 $48 + 72 + 48 + 42 + 42 + 42 = 294$

<另解>

4 張卡片排列-排除首位為 0-排除重複數字+容斥 0553 這類情況

$$P_4^4 \times 2^4 - P_3^3 \times 2^3 - C_2^4 \times 2^2 \times 2 + C_2^3 \times 2 = 384 - 48 - 48 + 6 = 294$$

共有 294 個。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 期中考試，數學考試共 25 題選擇題，答對 1 題給 4 分，答錯 1 題倒扣 1 分，不答不給分，阿芬作答 18 題，答錯 1 題，她應該得到_____分。

<解析>

$$(18-1)\times 4-1\times 1=68-1=67$$

2. 把 2025 寫成四個不同正整數的平方和的形式，且每個數都是 5 的倍數。那麼這四個數的和為_____。

<解析>

每個因數先提取 5，則有 $2025\div 25=81$ ，接下來把 81 寫成四個不同正整數的平方和的形式，則有 $81=6^2+5^2+4^2+2^2$ ，這四個數分別為 5×6 ， 5×5 ， 5×4 ， 5×2 ，它們的和為 $5\times(6+5+4+2)=85$ 。

3. 阿德將鐵絲一條，先截去 $\frac{1}{5}$ ，又截去剩下的 $\frac{1}{6}$ ，最後又截去剩下的 $\frac{1}{3}$ ，尚餘 90 公尺，則鐵絲原長是_____公尺。

<解析>

$$\square\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=90$$

$$\square=90\div\frac{4}{5}\div\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=202.5$$

4. 已知矩形的長、寬都是整數，面積為 2025 平方公分，那麼所有這樣的矩形周長之和為_____公分。

<解析>

$$2025=3^4\times 5^2=45^2$$

周長之和為 $2\times(2025 \text{ 的因數和})+2\times 45=2\times[(1+3+9+27+81)\times(1+5+25)]+90=7592$ 。

5. There are five numbers: 8, 13, 14, 17, and 38. We want to divide them into two groups such that the sum of one group is twice the sum of the other group. Which number is in the same group as 13? _____

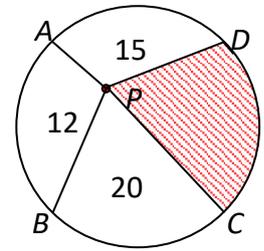
<解析>

$$8+13+14+17+38=90$$

$$90\div(2+1)=30$$

$$30-13=17$$

6. 如圖，圓內有一點 P ，與圓周上的四等分點 A 、 B 、 C 、 D 相連分圓成四部分，其中三部分的面積為 12、15、20。那麼陰影部分的面積為_____。



<解析>

弓形相等，正方形中的一半模型，得到 $15+20-12=23$ 。

7. 已知 $3^2=3\times 3=9$ ， $3^3=3\times 3\times 3=27$ ， $3^4=3\times 3\times 3\times 3=81$ ，.....。將 3^{2025} 乘開後，他的個位數的數字為_____。

<解析>

$3^1=3$ 、 $3^2=9$ 、 $3^3=27$ 、 $3^4=81$ 、 $3^5=243$ →四個數一組為一循環

$2025\div 4=506\dots 1$

因為餘數=1，故個位數為 3

8. 把三個邊長為整數的正方形紙片如圖 1 放入一個大正方形框中，圖 2 中梯形面積為 36，圖 3 中梯形面積為 28。那麼圖 1 中陰影正方形的面積為_____。

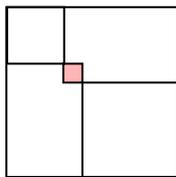


圖 1

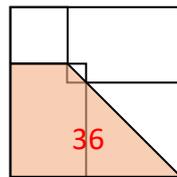


圖 2

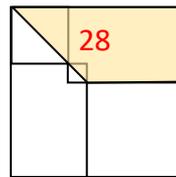


圖 3

<解析>

設大正方形邊長為 a ，第二大正方形邊長為 b ，則

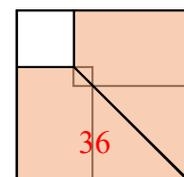
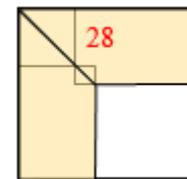
$$a^2 - b^2 = 2 \times 28, (a+b)(a-b) = 56.$$

$$\begin{cases} a+b=28 \\ a-b=2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} a+b=14 \\ a-b=4 \end{cases}, \begin{cases} a=15 \\ b=13 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} a=9 \\ b=5 \end{cases}$$

第三個正方形面積為 $15 \times 15 - 36 \times 2 = 225 - 72 = 183$ (非平方數)

第三個正方形面積為 $9 \times 9 - 36 \times 2 = 9$ ，邊長為 3

最小的正方形面積為 $(9-3-5)^2 = 1$ 。



三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 甲、乙兩家飲料店分別對同一種每杯 10 元的飲料推出促銷案:

甲店: 原包裝買 5 杯送 1 杯。

乙店: 推出除了增量 20% 的加大杯(可分裝在原来的容量杯), 並照原價再打九折。

若阿靜要買 60 杯同一種飲料送給全班同學喝, 則她應選擇哪一家店較划算?

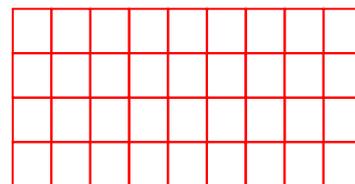
<解析>

甲店: $60 \div (5+1) = 10$ 次, $10 \times 5 \times 10 = 500$ 元

乙店: $60 \div (1+0.2) = 50$ 杯, $50 \times 10 \times 0.9 = 450$ 元

$500 > 450$, 故乙店比較划算

2. Given that the length and width of a small rectangle are both greater than 1, and its perimeter is equal to twice its area, these small rectangles are arranged into a larger rectangle with 9 rows and 4 columns. What is the minimum possible perimeter of the larger rectangle?



<解析>

設小長方形的長為 $x > 0$, 寬為 $y > 0$, 則

$$2(x+y) = 2xy, \quad x+y = xy, \quad y = \frac{x}{x-1}$$

目標求大長方形的周長 $C = 2(9x+4y)$ 的最小值。

$$C = 2 \left(9x + \frac{4x}{x-1} \right) = 2 \left(9x + \frac{4x-4+4}{x-1} \right) = 2 \left[13 + 9(x-1) + \frac{4}{x-1} \right]$$

當兩乘積為定值, 兩數越接近和越小,

發現 $9(x-1) \times \frac{4}{x-1} = 36$, 當 $9(x-1) = \frac{4}{x-1} = 6$, $x = \frac{5}{3}$, 此時 $y = \frac{5}{2}$,

$9(x-1) + \frac{4}{x-1}$ 取最小值 12, 從而 $C \geq 2(13+12) = 50$ 。