

第二十一屆 國際數學競賽台灣區複賽
21st International Mathematics Contest(Taiwan)

國
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

- ◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	B	A	C	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	40	$a > \frac{15}{2}$	$(-5, -1)$	$<$	23	4	535	$\frac{1}{6}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若 a 是一個六位數，如果將 2025 放在 a 的左方而形成一個十位數，則此十位數以下列何者表示最恰當? (A) $2025+a$ (B) $2025a$ (C) $2025 \times 10^5 + a$ (D) $2025 \times 10^6 + a$

<解析>

此十位數的值= $2025000000+a=2025 \times 10^6 + a$
選 D。

2. 把分數 $\frac{2025}{7}$ 化成小數後，小數點後面第 2025 位上的數字是_____。
(A)2 (B)8 (C)5 (D)7

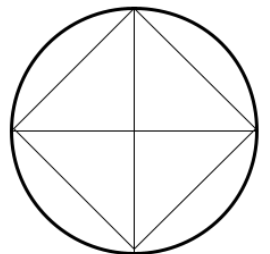
<解析>

$$\frac{2025}{7} = 289\frac{2}{7}, \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}, \text{循環節是 } 285714$$

$$2025 \div 6 = 337(\text{組}) \dots 3(\text{個})$$

故小數點後面第 2025 位上的數字是 5，選 C。

3. 有一張圓形紙，對折兩次後，再將 2 條互相垂直的直徑連起來，形成一個正方形，其正方形面積為 49 平方公分，求這個圓面積是約多少平方公分? (A)75.36 (B)76.93 (C)78.5 (D)80.07



<解析>

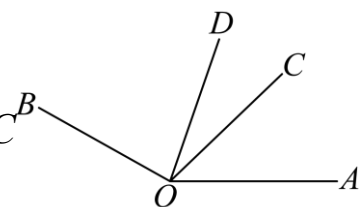
假設半徑= $\square$ ，故對角線=直徑= $\square \times 2$

$$\square \times 2 \times \square \times 2 \div 2 = 49, \square \times \square = \frac{49}{2}$$

故圓面積= $\square \times \square \times 3.14 = \frac{49}{2} \times 3.14 = 76.93$ ，選 B。

4. As shown in the figure, it is given that $\angle BOC = 2\angle AOC$,

$\overline{OD}$ bisects (平分) $\angle AOB$, and $\angle COD = 19^\circ$. Then, $\angle BOC$ is _____ degrees. (A) 74° (B) 76° (C) 80° (D) 82°



<解析>

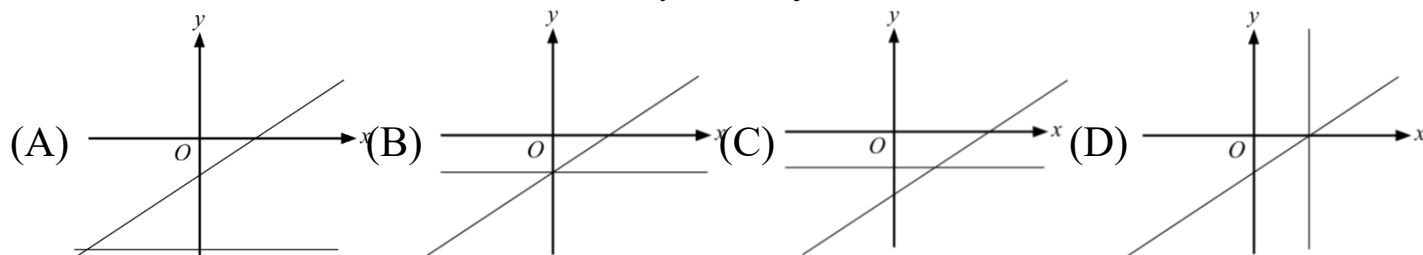
設 $\angle AOC = x^\circ$, $\because \angle BOC = 2\angle AOC \therefore \angle BOC = 2x^\circ$, $\angle AOB = 3x^\circ$

又 $\overline{OD}$ 平分 $\angle AOB$

$\therefore \angle AOD = 1.5x^\circ$ 且 $\angle COD = \angle AOD - \angle AOC$

$\therefore 1.5x - x = 19$, $x = 38$, $\angle BOC = 76^\circ$

5. 若 $a < 0$, 下列何者最有可能是 $-2x + 3y = a$ 與 $y = a$ 在坐標平面上的圖形?



<解析>

$a < 0$, 令 $a = -6$

$-2x + 3y = -6$ 且 $y = -6$, 其交點坐標 $(-6, -6)$

故選交點在第三象限的圖形, 選 A。

6. 已知: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, 那麼 $3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 99^2 =$ _____。

(A) 112743 (B) 112752 (C) 112761 (D) 112770

<解析>

$3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 99^2 = 9(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 33^2)$

$= 9 \times \frac{1}{6} \times 33 \times (33+1) \times (2 \times 33 + 1) = 3 \times 33 \times 17 \times 67 = 112761$, 選 C。

7. 方程: $\frac{x}{3} + \frac{x}{15} + \frac{x}{35} + \dots + \frac{x}{2023 \times 2025} = 1$ 的解是 $x =$ _____。(A) $\frac{2025}{1012}$ (B) $\frac{2025}{2024}$ (C) $\frac{1012}{2025}$
(D) $\frac{2024}{2025}$

<解析>

原式 $= x \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2025} \right) \right] = 1$, $\frac{x}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2025} \right) \right] = 1$

$\frac{x}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2025} \right] = 1$, $\frac{x}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2025} \right) = 1$, $x = \frac{2025}{1012}$, 選 A。

8. 如果 $(x+1)(x-2)(x+3)=x^3+2x^2+px-6$ ，那麼 $p=$ _____。(A)-4 (B)-5 (C)-6 (D)-7

<解析>

$$\text{令 } x=-1, 0=(-1)^3+2(-1)^2-p-6$$

$$p=-6-1+2=-5, \text{ 選 B。}$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. Let numbers A and B satisfy the following conditions: when A is divided by B , the quotient is 5 and the remainder is 5; and when $2A$ is divided by B , the quotient is 11 and the remainder is 3. The value of A is _____.

<解析>

$$\text{設 } A=x, B=y$$

$$\begin{cases} x=5y+5 \\ 2x=11y+3 \end{cases}, 2(5y+5)=11y+3, 10y+10=11y+3, y=7$$

$$\text{則 } x=5 \times 7 + 5 = 40$$

2. 若關於 x 的不等式組 $\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ 3x-a \geq 0 \end{cases}$ 無實數解，則 a 的取值範圍是_____。

<解析>

$$\begin{cases} 5-2x \geq 0 \dots \textcircled{1} \\ 3x-a \geq 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}, \textcircled{1} \text{ 得 } 5 \geq 2x, x \leq \frac{5}{2}, \text{ 代入 } \textcircled{2}, \text{ 得 } x \geq \frac{a}{3}$$

且不等式組無實數解

$$\therefore \frac{5}{2} < \frac{a}{3}, \text{ 得解: } a > \frac{15}{2}$$

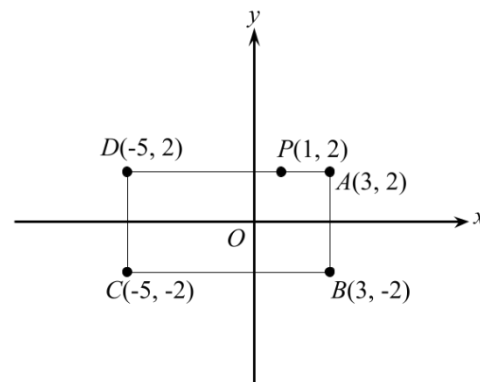
3. 如圖， A 、 B 、 C 、 D 為森林公園的四個頂點，阿德與小嫻相約從 P 點同時出發繞著公園散步，阿德依順時針方向每分鐘走 5 個單位長，小嫻依逆時針方向每分鐘走 3 個單位長，請問兩人出發後，第一次相遇時的位置坐標是_____。

<解析>

$$\text{周長} = (8+4) \times 2 = 24, \text{ 相遇時 } \underline{\text{阿德}} \text{ 走了 } 24 \times \frac{5}{8} = 15,$$

$$\underline{\text{小嫻}} \text{ 走了 } 24 \times \frac{3}{8} = 9$$

P 點出發，逆時針走 6 個單位長，走到 D 點，再往下走 3 個單位長，剛好 9 個單位長。
故相遇的坐標為 $(-5, 2-3) = (-5, -1)$



4. 比較大小: $\frac{2020}{6061}$ _____ $\frac{2525}{7576}$ 。(填 $>$ 、 $<$ 、 $=$ 或不確定)

<解析>

$$\frac{2020}{6061} = \frac{1}{3} \times \frac{6060}{6061} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{6061}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 6061}; \quad \frac{2525}{7576} = \frac{1}{3} \times \frac{7575}{7576} = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{7576}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 7576}$$

故 $\frac{2020}{6061} < \frac{2525}{7576}$

5. 第一次期中考，數學考試共 25 題選擇題，答對 1 題給 4 分，答錯 1 題倒扣 1 分，不答不給分，阿德作錯 3 題，得到 77 分，請問他共作答_____題。

<解析>

$$77 + 3 \times 1 = 80$$

$$80 \div 4 = 20$$

$20 + 3 = 23$ ，共作答 23 題。

6. 求代數式 $|x-3|+2|x-2|+3|x-1|$ 的最小值是_____。

<解析>

$$|x-3|+2|x-2|+3|x-1|=(|x-1|+|x-3|)+2(|x-1|+|x-2|)\geq(3-1)+2(2-1)=4$$

7. 旺旺早餐店特惠活動，買 4 個三明治和 6 杯奶茶，只需要 310 元，若阿寧到早餐店購買 6 個三明治和 9 杯奶茶，付了 1000 元鈔票，應可找回_____元。

<解析>

設三明治每個 x 元，奶茶每杯 y 元

$$\text{依題意得 } 4x+6y=310, \quad 2x+3y=155$$

$$\text{故 } 1000-(6x+9y)=1000-3(2x+3y)=1000-3 \times 155=1000-465=535$$

8. 已知 $x+y=5$ ， $x^2+y^2=13$ ，則 $\frac{(x-y)^2}{xy}$ =_____。

<解析>

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=25-13=12, \quad xy=6$$

$$\therefore \frac{(x-y)^2}{xy} = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{13-12}{6} = \frac{1}{6}$$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 某日恩熙買了一盒蘋果和梨子混裝的水果禮盒，已知此盒中的蘋果占全部水果的 $\frac{1}{4}$ 多 2 顆，且梨子占了全部水果的 $\frac{5}{6}$ 少 3 顆，則此盒中的蘋果、梨子各有多少顆？

<解析>

設全部水果為 x 顆

$$x = \frac{1}{4}x + 2 + \frac{5}{6}x - 3, \quad x = \frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x - 1, \quad 12x = 3x + 10x - 12$$

$$\therefore x = 12, \text{ 則蘋果} = 12 \times \frac{1}{4} + 2 = 5, \text{ 梨子} = 12 - 5 = 7$$

故蘋果有 5 顆，梨子有 7 顆。

<另解>

設蘋果為 x 顆，梨子為 y 顆

則全部水果 = $x + y$ 顆

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(x+y) + 2 \dots \textcircled{1} \\ y = \frac{5}{6}(x+y) - 3 \dots \textcircled{2} \end{cases}, \text{ 由 } \textcircled{1} \text{ 得: } 4x = x + y + 8, y = 3x - 8 \dots \textcircled{3}$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 得, } 6y = 5x + 5y - 18, y = 5x - 18 \dots \textcircled{4}$$

$$\text{則 } \textcircled{3} = \textcircled{4}, 3x - 8 = 5x - 18, 2x = 10, x = 5, \text{ 代入 } \textcircled{3}, y = 3 \times 5 - 8 = 7$$

故蘋果有 5 顆，梨子有 7 顆。

2. 25 basketball players wearing jerseys numbered 1 to 25 formed a circle. Prove that there must be three adjacent players whose jersey numbers add up to more than 40.

<解析>

設在圓周上依逆時針順序以 1 號為起點，令 $a_1 = 1$ ，運動服號碼數為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ ($a_2, a_3, \dots, a_{25}$ 是 2、3、4、……、25 其中 1 個)

假設若任意三個相鄰的隊員，他們的球衣號碼一定小於等於 40

$$\text{則 } a_2 + a_3 + \dots + a_{25} = (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{23} + a_{24} + a_{25}) \leq 8 \times 40$$

與 $a_2 + a_3 + \dots + a_{25} = 2 + 3 + \dots + 25 = 324$ 矛盾

所以一定存在三個相鄰的隊員，它們的球衣號碼數加起來一定大於 40。

(本題送分)